

高三练习卷

数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$. 若 $M \subseteq A$ 且 $M \subseteq B$, 则 M 的个数为
A. 1 B. 3 C. 4 D. 6
2. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (\sin \theta, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2 \sin \theta, -1)$, 且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 则 $\cos 2\theta =$
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. -1
3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 “ $q < 1$ ” 是 “ $|a_4| > |a_5|$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 4 位优秀党务工作者到 3 个基层单位进行百年党史宣讲, 每人宣讲 1 场, 每个基层单位至少安排 1 人宣讲, 则不同的安排方法数为
A. 81 B. 72 C. 36 D. 6
5. 我国于 2021 年 5 月成功研制出目前国际上超导量子比特数量最多的量子计算原型机 “祖冲之号”, 操控的超导量子比特为 62 个. 已知 1 个超导量子比特共有 “ $|0\rangle, |1\rangle$ ” 2 种叠加态, 2 个超导量子比特共有 “ $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ ” 4 种叠加态, 3 个超导量子比特共有 “ $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle$ ” 8 种叠加态, $\dots$. 只要增加 1 个超导量子比特, 其叠加态的种数就呈指数级增长. 设 62 个超导量子比特共有 N 种叠加态, 则 N 是一个 _____ 位的数. (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$)
A. 18 B. 19 C. 62 D. 63
6. 在 $(1+2x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中, 常数项为
A. 210 B. 252 C. 462 D. 672

7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若 C 上存在点 P 满足 $\angle F_2PO = 2\angle F_1PO = \frac{\pi}{3}$, 则该双曲线的离心率为

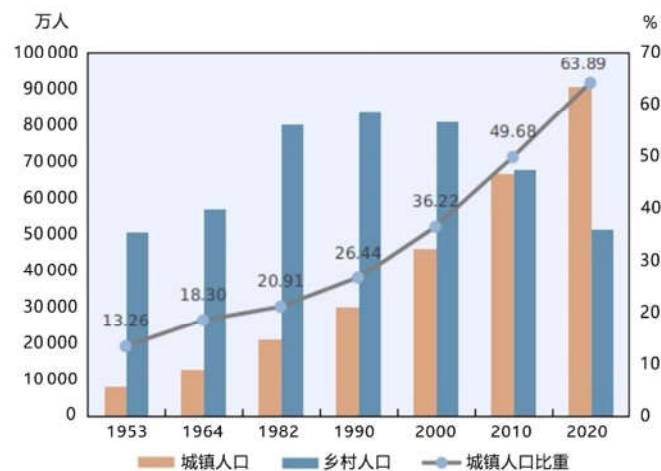
A. $\sqrt{3}+1$ B. $\sqrt{2}+1$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

8. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, N 为 BC 的中点. 当点 M 在平面 DCC_1D_1 内运动时, 有 $MN \parallel$ 平面 A_1BD , 则线段 MN 的最小值为

A. 1 B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. 新中国成立以来, 我国共进行了 7 次人口普查, 这 7 次人口普查的城乡人口数据如下:



根据该图数据, 这 7 次人口普查中

- A. 城镇人口数均少于乡村人口数
B. 乡村人口数达到最高峰是第 4 次
C. 和前一次相比, 城镇人口比重增量最大的是第 7 次
D. 城镇人口总数逐次增加
10. 下列结论正确的是

- A. 若复数 z 满足 $z + \bar{z} = 0$, 则 z 为纯虚数
B. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$
C. 若复数 z 满足 $z^2 \geq 0$, 则 $z \in \mathbf{R}$
D. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 则 $z_1 = z_2 = 0$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $C = \frac{\pi}{2}$. 将 $\triangle ABC$ 分别绕边 a, b, c 所在的直线旋转一周, 形成的几何体的体积分别记为 V_a, V_b, V_c , 侧面积分别记为 S_a, S_b, S_c , 则

A. $V_a + V_b \geq 2V_c$ B. $S_a + S_b \geq 2S_c$ C. $\frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2} = \frac{1}{V_c^2}$ D. $\frac{1}{S_a^2} + \frac{1}{S_b^2} = \frac{1}{S_c^2}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right|$, 则

A. $f(-x) = f(x)$

B. $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$

C. $f(x)$ 的最大值为2

D. 不等式 $f(x) \geq 2\cos x$ 的解集为 $\left\{ x \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 已知角 α 的终边经过点 $(-3, 4)$, 则 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值是_____.

14. 设曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率为1, 试写出满足题设的一个 $f(x) =$ _____.

15. 甲、乙、丙三支足球队进行双循环赛(任意两支球队都要在自己的主场和对方的主场各赛一场). 根据比赛规则, 胜一场得3分, 平一场得1分, 负一场得0分. 比赛进行中的统计数据如下表:

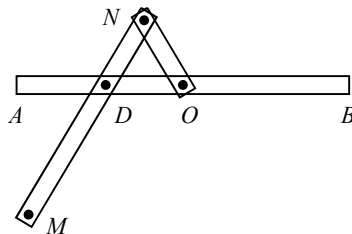
	已赛场数	胜的场数	平的场数	负的场数	积分
甲	4	2	1	1	7
乙	3	0	2	1	2
丙	3	1	1	1	4

根据表格中的信息可知:

(1) 还需进行_____场比赛, 整个双循环赛全部结束;

(2) 在与乙队的比赛中, 甲队共得了_____分. (第一问2分, 第二问3分)

16. 舒腾尺是荷兰数学家舒腾(1615-1660)设计的一种作图工具. 如图, O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处的铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动. 当点 D 在滑槽 AB 内作往复移动时, 带动点 N 绕 O 转动, 点 M 也随之而运动. 记点 N 的运动轨迹为 C_1 , 点 M 的运动轨迹为 C_2 . 若 $ON = DN = 1$, $MN = 3$, 过 C_2 上的点 P 向 C_1 作切线, 则切线长的最大值为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

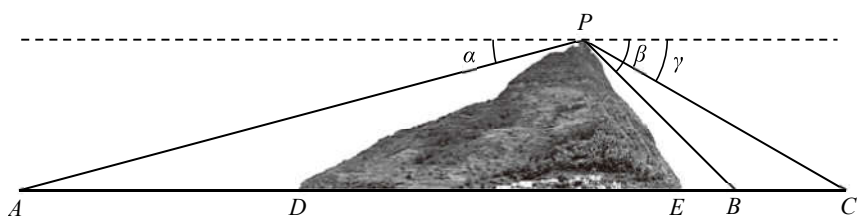
已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_6 = 2$ ， $a_4 + a_5 = 12$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = a_1 a_3 a_5 \cdots a_{2n-1}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的最大项。

18. (12 分)

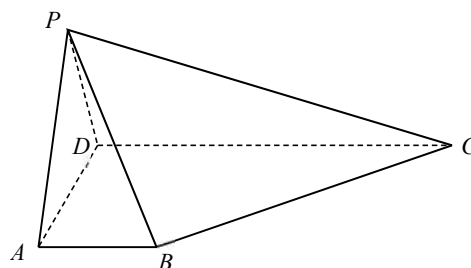
如图， A, B, C 为山脚两侧共线的三点，在山顶 P 处观测三点的俯角分别为 α, β, γ 。现测得 $\alpha = 15^\circ$ ， $\beta = 45^\circ$ ， $\gamma = 30^\circ$ ， $AD = \frac{5}{2}$ km， $EB = \frac{1}{2}$ km， $BC = 1$ km。计划沿直线 AC 开通一条穿山隧道，试求出隧道 DE 的长度。



19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA = PD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = 1$ ， $AD = 2$ ， $CD = 3$ ．直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° ．

- (1) 求证： $PB \perp BC$ ；
- (2) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值．



20. (12 分)

已知 P 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上位于第一象限的点， F 为 C 的焦点， PF 与 C 交于点 Q (异于点 P)．直线 l 与 C 相切于点 P ，与 x 轴交于点 M ．过点 P 作 l 的垂线交 C 于另一点 N ．

- (1) 证明：线段 MP 的中点在定直线上；
- (2) 若点 P 的坐标为 $(2, 2\sqrt{2})$ ，试判断 M, Q, N 三点是否共线．

21. (12 分)

在医学上，为了加快对流行性病毒的检测速度，常采用“混检”的方法：随机的将若干人的核酸样本混在一起进行检测，若检测结果呈阴性，则认定该组每份样本均为阴性，无需再检测；若检测结果呈阳性，则还需对该组的每份样本逐个重新检测，以确定每份样本是否为阳性。设某流行性病毒的感染率为 p 。

(1) 若 $p = 0.005$ ，混检时每组 10 人，求每组检测次数的期望值；

(2) 混检分组的方法有两种：每组 10 人或 30 人。试问这两种分组方法的优越性与 p 的值是否有关？

(参考数据： $0.995^{10} \approx 0.9511$ ， $0.995^{30} \approx 0.8604$)

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 + mx + 1)e^x$ ， $m \in \mathbf{R}$ 。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若不等式 $x^2 - mx + 1 + e^{x+2} \geq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。