

高三数学网课质量检测卷

一、单选题（共4小题，每题5分，共20分）

1. 在复平面内，复数 $\frac{2+4i}{i}$ 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知空间中不过同一点的三条直线 l, m, n ，条件“ l, m, n 共面”成立的一个充分不必要条件是

- A. $l \cap m = P, l \cap n = Q$ B. l, m, n 两两相交
C. $l \parallel m, l \parallel n$ D. $l \parallel m, m \cap n = P$

3. 已知一组数据1, 2, $a, b, 5, 8$ 的平均数和中位数均为4，其中 $a, b \in \mathbf{N}^*$ ，在去掉其中的一个最大数后，该组数据的

- A. 平均数不变 B. 中位数不变 C. 众数不变 D. 标准差不变

4. 向量旋转具有反映点与点之间特殊对应关系的特征.平面向量旋转公式在中学数学中用于求旋转相关点的轨迹方程具有明显优势，已知对于任意平面向量 $\vec{AB} = (x, y)$ ，把 $\vec{AB}$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量 $\vec{AP} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ ，叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 θ 角得到点 P .已知平面内点 $A(1, 2)$ ，点 $B(1 + \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$ ，把点 B 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到点 P ，则点 P 的坐标为

- A. $(0, -1)$ B. $(4, 1)$ C. $(2, -1)$ D. $(-2, 1)$

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，直线 $y = kx$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点（其中点 A 位于第一象限）， $\angle AFB = 90^\circ$ ，且 $\triangle FAB$ 的面积为 $\frac{3}{2}a^2$ ，则直线 AF 的斜率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 已知 $m \in \mathbf{R}$ ，过定点 A 的动直线 $mx + y = 0$ 和过定点 B 的动直线 $x - my - m + 3 = 0$ 交于点 P ，则 $|PA| + \sqrt{3}|PB|$ 的取值范围是

- A. $(\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ B. $(\sqrt{10}, \sqrt{30}]$ C. $[\sqrt{10}, \sqrt{30})$ D. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$

7. 已知 $a + 2^a = 2, b + 3^b = 2$ ，则 $\lg a$ 与 $\lg b$ 的大小关系是

- A. $\lg a < \lg b$ B. $\lg a = \lg b$ C. $\lg a > \lg b$ D. 不确定

8. 以 ABC 为底的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 内接于同一个球, 并且正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面 ABC 所成的角为 45° , 记正三棱锥 $P-ABC$ 和正三棱锥 $Q-ABC$ 的体积分别为 V_1 和 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

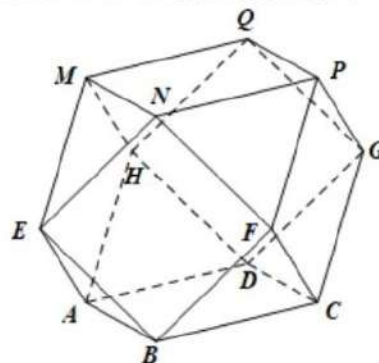
二、多选题 (共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分)

9. 已知函数 $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$, 则

- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 是周期函数且最小正周期为 2π
C. $f(x)$ 的值域是 $[-4, 4]$ D. 当 $x \in (0, \pi)$ 时 $f(x) < 0$

10. 半正多面体 (*semiregular solid*) 亦称“阿基米德多面体”, 是由边数不全相同的正多边形围成的多面体, 体现了数学的对称美. 二十四等边体就是一种半正多面体, 是由正方体切截而成的, 它由八个正三角形和六个正方形构成 (如图所示), 若它的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 则

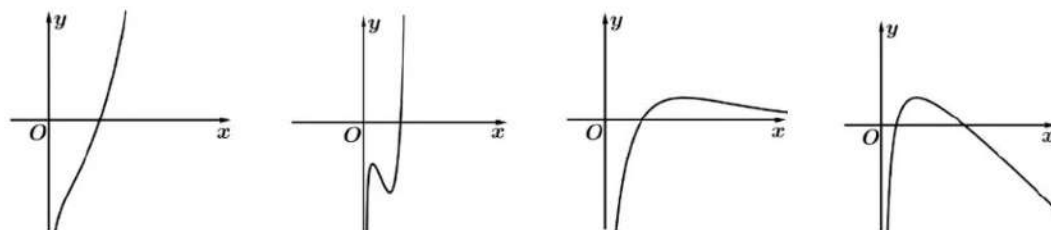
- A. $BF \perp$ 平面 EAB
B. 该二十四等边体的体积为 $\frac{20}{3}$
C. 该二十四等边体外接球的表面积为 8π
D. PN 与平面 $EBFN$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$



11. 已知曲线 C 的方程为 $\sqrt{x^2 + y^2} = |x + 2y|$, 圆 $M: (x-5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 则

- A. C 表示一条直线
B. 当 $r=4$ 时, C 与圆 M 有 3 个公共点
C. 当 $r=2$ 时, 存在圆 N , 使得圆 N 与圆 M 相切, 且圆 N 与 C 有 4 个公共点
D. 当 C 与圆 M 的公共点最多时, r 的取值范围是 $(4, +\infty)$

12. 函数 $f(x) = e^{kx} \cdot \ln x$ (k 为常数) 的图象可能是



A

B

C

D

三、填空题（共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

13. 已知 $x > -1$, $y > 0$ 且满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y}$ 的最小值为_____.

14. 为迎接 2022 年北京冬奥会, 某工厂生产了一批雪车, 这批产品中按质量分为一等品, 二等品, 三等品. 从这批雪车中随机抽取一件雪车检测, 已知抽到不是三等品的概率为 0.93, 抽到一等品或三等品的概率为 0.85, 则抽到一等品的概率为_____.

15. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 内接于半径为 2 的球 O , 且扇形 OPA 的面积为 $\frac{4\pi}{3}$, 则正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为_____.

16. 某校数学课外小组在坐标纸上, 为学校的一块空地设计植树方案如下: 第 k 棵树种植

在点 $P_k(x_k, y_k)$ 处, 其中 $x_1 = 0, y_1 = 0$. 当 $k \geq 2$ 时,
$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + 1 - 5 \left[T\left(\frac{k-1}{5}\right) - T\left(\frac{k-2}{5}\right) \right], \\ y_k = y_{k-1} + T\left(\frac{k-1}{5}\right) - T\left(\frac{k-2}{5}\right) \end{cases},$$

$T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分, 例如 $T(2.6) = 2$, $T(0.2) = 0$. 按此方案, 第 6 棵树种植坐标应为_____, 第 2018 棵树种植点的坐标应为_____.

四、解答题（共 6 题，共 70 分）

17. (10 分) 在① $a \sin B = b \sin \frac{B+C}{2}$; ② $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} S$; ③ $\sqrt{3} a \sin C + a \cos C = b + c$. 这

三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并回答问题.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积, D 是 BC 的中点. 若 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, 且_____, 求 A 及 AD 的长.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $6, 2S_n, a_n$ 成等差数列.

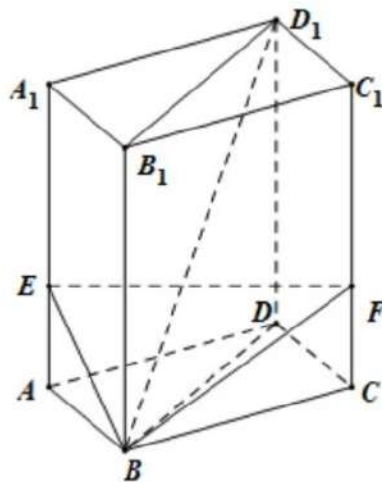
(1) 求 a_n ;

(2) 是否存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1} > 6a_m$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立? 若存在, 求 m 的所有取值; 否则, 请说明理由.

19. (12 分) 如图所示, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, 侧棱垂直于底面, 点 E, F 分别在棱 AA_1, CC_1 上, 且满足 $AE = \frac{1}{3}AA_1, CF = \frac{1}{3}CC_1$, 平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l .

(1) 证明: 直线 $l \perp$ 平面 BDD_1 ;

(2) 已知 $EF=2, BD_1=4$, 设 BF 与平面 BDD_1 所成的角为 θ , 求 $\sin \theta$ 的取值范围.



20. (12 分) 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, 直线 $l: y = 2x + 1$ 与 C 交于 A, B 两点且 $|AF| + |BF| = 20$.

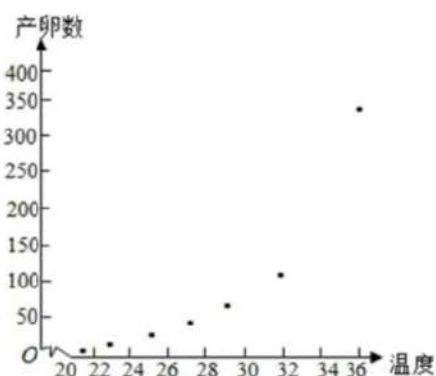
(1) 求 C 的方程.

(2) 若直线 $m: y = 2x + t (t \neq 1)$ 与 C 交于 M, N 两点, 且 AM 与 BN 相交于点 T , 证明: 点 T 在定直线上.

21. (12 分) 红铃虫是棉花的主要害虫之一, 能对农作物造成严重伤害, 每只红铃虫的平均产卵数 y 和平均温度 x 有关, 现收集了以往某地的 7 组数据, 得到下面的散点图及一些统计量的值.

平均温度 $x / ^\circ\text{C}$	21	23	25	27	29	31	33
平均产卵数 y / 个	7	11	21	24	66	115	325
$z = \ln y$	1.9	2.4	3.0	3.2	4.2	4.7	5.8

(1) 根据散点图判断, $y = bx + a$ 与 $y = ce^{ax}$ (其中 $e = 2.718 \dots$ 为自然对数的底数) 哪一个更适宜作为平均产卵数 y 关于平均温度 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由) 并由判断结果及表中数据, 求出 y 关于 x 的回归方程. (计算结果精确到 0.01)



(2) 根据以往统计, 该地每年平均温度达到 28°C 以上时红铃虫会造成严重伤害, 需要人工防治, 其他情况均不需要人工防治, 记该地每年平均温度达到 28°C 以上的概率为 p . 记该地今后 5 年中, 恰好需要 3 次人工防治的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值, 并求出相应的概率 p_0 .

附: 回归方程 $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

参考数据				
$\sum_{i=1}^7 x_i^2$	$\sum_{i=1}^7 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^7 x_i z_i$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
5215	17713	717	81.3	3.6

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^{x+1} + ax^2 + 2ax (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $x_2 - x_1 > \ln 2$, 求 a 的取值范围.

参考答案

单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	C	A	A	D	C	D

多选题

9	10	11	12
AB	BCD	BC	ABC

填空题

13	14	15	16
$\frac{9}{2}$	0.78	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	(1,2) (3,404)

解答题

17.选择①: 在 $\triangle ABC$ 中, 因 $a \sin B = b \sin \frac{B+C}{2}$, $B+C=\pi-A$, 则 $a \sin B = b \cos \frac{A}{2}$,

由正弦定理得, $\sin A \sin B = \sin B \cos \frac{A}{2}$, 而 $\sin B > 0$, $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$,

即有 $\sin A = \cos \frac{A}{2}$, 因此得 $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2}$,

所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$;

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $A = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得 $c^2 - 2c - 3 = 0$, 解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去), 即 $c = 3$,

因为 D 是 BC 的中点, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

于是得 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{4}\left(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2^2\right) = \frac{19}{4}$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{19}}{2}$, 即

AD 的长为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

选择②: 在 $\triangle ABC$ 中, 因 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}S$, 则 $bc \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}bc \sin A$,

而 $A \in (0, \pi)$, 于是得 $\tan A = \sqrt{3}$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$;

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $A = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得 $c^2 - 2c - 3 = 0$, 解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去), 即 $c = 3$,

因为 D 是 BC 的中点, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

于是得 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{4}\left(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2^2\right) = \frac{19}{4}$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{19}}{2}$, 即

AD 的长为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

选择③: 在 $\triangle ABC$ 中, 因 $\sqrt{3}a \sin C + a \cos C = b + c$,

由正弦定理得 $\sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C = \sin B + \sin C$,

而 $B = \pi - (A + C)$, $\sin C > 0$,

从而有 $\sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C = \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin C$,

即 $\sqrt{3} \sin A = \cos A + 1$, 则 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

所以 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$;

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $A = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得 $c^2 - 2c - 3 = 0$, 解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去), 即 $c = 3$,

因为 D 是 BC 的中点, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

于是得 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{4}\left(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2^2\right) = \frac{19}{4}$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{19}}{2}$, 即

AD 的长为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

18. 解: (1) 因为 $6, 2S_n, a_n$ 成等差数列, 所以 $4S_n = a_n + 6$,

因此有 $4S_{n-1} = a_{n-1} + 6$ ($n \geq 2$), 两式相减得: $4a_n = a_n - a_{n-1}$,

即 $a_n = -\frac{1}{3}a_{n-1}$ ($n \geq 2$),

当 $n = 1$ 时, $4S_1 = a_1 + 6$, $\therefore a_1 = 2$, 故 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1};$$

$$(2) a_n a_{n+1} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1}, \therefore \text{题中不等式等价于}$$

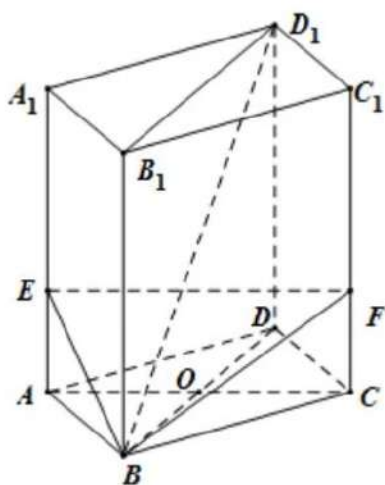
$$4 \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \right] > 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{m-1},$$

$$\text{即 } \frac{-\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{9^n}\right)}{1 - \frac{1}{9}} > 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{m-1}, \text{ 即 } \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right) < \left(-\frac{1}{3}\right)^{m-2} \text{ 对 } \forall n \in N^* \text{ 成立,}$$

$$\because 1 - \frac{1}{9^n} < 1 \text{ 且 } n \rightarrow +\infty \text{ 时 } 1 - \frac{1}{9^n} \rightarrow 1, \therefore \left(-\frac{1}{3}\right)^{m-2} \geq \frac{3}{8}, \text{ 显然 } m \text{ 为偶数, } m=2 \text{ 成立,}$$

$$\text{当 } m \geq 4 \text{ 时 } \left(-\frac{1}{3}\right)^{m-2} \leq \frac{1}{9}, \text{ 故 } m=2.$$

19. (1) 如图, 连接 AC , 与 BD 交于点 O .



由条件可知 $AE \parallel CF$, 且 $AE = CF$, 所以 $AC \parallel EF$,

因为 $EF \subset \text{平面 } BEF$, 所以 $AC \parallel \text{平面 } BEF$.

因为 $\text{平面 } BEFI \cap \text{平面 } ABC = l$, 所以 $AC \parallel l$.

因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, 且侧棱垂直于底面,

所以 $AC \perp BD$, $AC \perp BB_1$,

又 $BD \cap BB_1 = B$, 所以 $AC \perp \text{平面 } BDD_1$,

所以 $l \perp$ 平面 BDD_1 .

(2) 如图所示, 以 O 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的方向为 x , y 轴的正方向建立空间直角坐标系.

设 $BD = 2a$, 因为 $BD < BD_1$, 所以 $0 < a < 2$.

则 $OB = a$, $DD_1 = \sqrt{BD_1^2 - BD^2} = 2\sqrt{4 - a^2}$.

所以 $B(a, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $F\left(0, 1, \frac{2}{3}\sqrt{4 - a^2}\right)$.

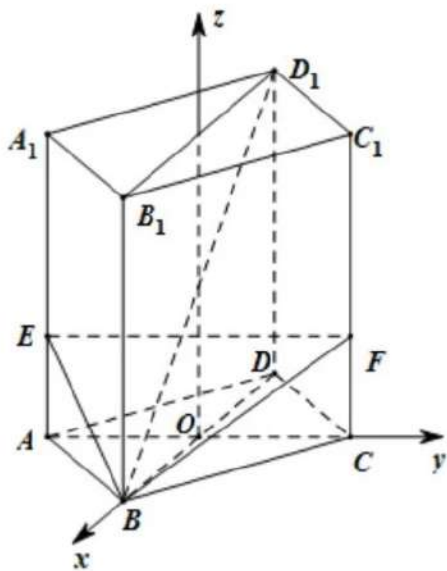
由 (1) 可知 $\overrightarrow{OC} = (0, 1, 0)$ 是平面 BDD_1 的一个法向量,

而 $\overrightarrow{BF} = \left(-a, 1, \frac{2}{3}\sqrt{4 - a^2}\right)$,

所以 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BF} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1 + \frac{4}{9}(4 - a^2)}} = \frac{3}{\sqrt{25 + 5a^2}},$

当 $0 < a < 2$ 时, $\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{3}{\sqrt{25 + 5a^2}} < \frac{3}{5},$

即 $\sin \theta \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3}{5}\right).$



20. (1) 解: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 得 $y^2 - (8p + 2)y + 1 = 0,$

则 $y_1 + y_2 = 8p + 2$,

从而 $|AF| + |BF| = y_1 + \frac{p}{2} + y_2 + \frac{p}{2} = 9p + 2 = 20$,

解得 $p = 2$, 故 C 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 证明: 设 $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$, $T(x_0, y_0)$, $\overline{TM} = \lambda \overline{TA} (\lambda \neq 1)$.

因为 $AB \parallel MN$, 所以 $\overline{TN} = \lambda \overline{TB}$.

根据 $\begin{cases} x_1^2 = 4y_1, \\ x_2^2 = 4y_2, \end{cases}$ 得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 4(y_1 - y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} = 8$,

同理得 $x_3 + x_4 = 8$.

又 $\begin{cases} x_3 - x_0 = \lambda(x_1 - x_0), \\ x_4 - x_0 = \lambda(x_2 - x_0), \end{cases}$ 两式相加得 $x_3 + x_4 - 2x_0 = \lambda(x_1 + x_2 - 2x_0)$,

即 $(4 - x_0)(1 - \lambda) = 0$, 由于 $\lambda \neq 1$, 所以 $x_0 = 4$.

故点 T 在定直线 $x = 4$ 上.

21. 解: (1) 由散点图可以判断, $y = ce^{dx}$ 适宜作为卵数 y 关于温度 x 的回归方程类型.

对 $y = ce^{dx}$ 两边取自然对数, 得 $\ln y = \ln c + dx$,

令 $\hat{z} = \ln y$, $a = \ln c$, $\hat{b} = d$, 则 $\hat{z} = \hat{b}x + a$,

由数据得 $\bar{x} = \frac{21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33}{7} = 27$,

$\sum_{i=1}^7 (x_i z_i - 7\bar{x}\bar{z}) = 36.6$, $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2 = 112$,

所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i z_i - 7\bar{x}\bar{z})}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} = \frac{36.6}{112} \approx 0.33$, $a = \bar{z} - \hat{b}\bar{x} = 3.6 - 0.33 \times 27 = -5.31$,

所以 z 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{z} = 0.33x - 5.31$,

则 y 关于 x 的回归方程为 $y = e^{0.33x - 5.31}$;

(2) 由 $f(p) = C_5^3 \cdot p^3 (1-p)^2$ 得 $f'(p) = C_5^3 \cdot p^2 (1-p)(3-5p)$,

因为 $0 < p < 1$, 令 $f'(p) > 0$ 得 $3-5p > 0$, 解得 $0 < p < \frac{3}{5}$;

所以 $f(p)$ 在 $\left(0, \frac{3}{5}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ 上单调递减,

所以 $f(p)$ 有唯一的极大值为 $f\left(\frac{3}{5}\right)$, 也是最大值;

所以当 $p_0 = \frac{3}{5}$ 时, $f(p)_{\max} = f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{216}{625}$.

22.(1) 由题知 $f'(x) = e^{x+1} + 2ax + 2a \geq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立,

即 $2a \geq -\frac{e^{x+1}}{x+1}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 令 $h(x) = -\frac{e^{x+1}}{x+1}$, $x > -1$,

则 $h'(x) = -\frac{e^{x+1} \cdot x}{(x+1)^2}$, $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单增, 在 $(0, +\infty)$ 上单减, $h(x) \leq h(0) = -e$,

$\therefore 2a \geq -e$, 即 $a \geq -\frac{e}{2}$;

(2) 由题知, x_1, x_2 是方程 $f'(x) = 0$ 的两根, 又 $f'(-1) = 1 \neq 0$, 故 x_1, x_2 是 $-\frac{e^{x+1}}{x+1} = 2a$ 的两根,

令 $h(x) = -\frac{e^{x+1}}{x+1}$, 由(1)知, $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, 0)$ 上单增, 在 $(0, +\infty)$ 上单减,

$\forall x \in (-\infty, -1), h(x) > 0$, 当 $x < -1$ 时, $h(x)$ 图象在 x 轴上方,

当 $x > -1$ 时, $h(x)$ 图象在 x 轴下方, 且 $x=0$ 时 $h(x)$ 取得最大值 $h(0) = -e$,

所以 $2a < -e$ 时, 方程 $h(x) = 2a$ 有两根 x_1, x_2 , 其中 $-1 < x_1 < 0 < x_2$,

若 $x_1 + \ln 2 \leq 0$, 则 $x_2 - x_1 > \ln 2$, $a < -\frac{e}{2}$;

若 $x_1 + \ln 2 > 0$, 则 $x_2 - x_1 > \ln 2 \Leftrightarrow x_2 > x_1 + \ln 2 \Leftrightarrow h(x_2) < h(x_1 + \ln 2)$,

而 $h(x_2) = h(x_1) = 2a$, 所以

$h(x_1) < h(x_1 + \ln 2) \Leftrightarrow -\frac{e^{x_1+1}}{x_1+1} < -\frac{e^{x_1+\ln 2+1}}{x_1+\ln 2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} > \frac{2}{x_1+\ln 2+1}$, 即 $x_1 < \ln 2 - 1$; 故

$-1 < x_1 < \ln 2 - 1$, $\therefore 2a = h(x_1) < h(\ln 2 - 1) = -\frac{2}{\ln 2} \Rightarrow a < -\frac{1}{\ln 2}$,

综上得 $a < -\frac{1}{\ln 2}$.