南京市第29中学2022届高三学情调研(第三次）

数学试题

本试卷共8页，22小题，满分150分.考试时间120分钟.填空题4题，解答题6题，要按题号一题一题拍照上传，其中14题和16题各有两空，两空答案拍在一起上传.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\left\{x \middle| x^2-3x+2\geq 0\right\}$，$B=\left\{x \middle| log_3\left(x+2\right)<1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x \middle| x\leq 1或x\geq 2\right\}$　　B. $\left\{x \middle| -2<x<1\right\}$　　C. $\left\{x \middle| x<1\right\}$　　D. $\varnothing$

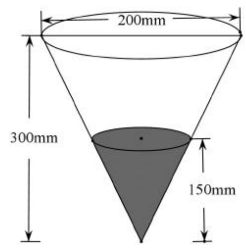
2. i为虚数单位，$z_1=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$，$z_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，则 $\left|z_1z_2\right|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3．把5名志愿者分配到三个不同的社区，每个社区至少有一个志愿者，其中甲社区恰有1名志愿者的分法有（　　）C

A．14种　　B．35种　　C．70种　　D．100种

4. 定义：将24小时内降水在平地上积水厚度(*mm*)来判断降雨程度；其中小雨(*0mm − 10mm*)，中雨(*10mm − 25mm*)，大雨(*25mm − 50mm*)，暴雨(*50mm − 100mm*)；小明用一个圆锥雉形容器接了24小时的雨水，则这天降雨属于哪个等级(　　)

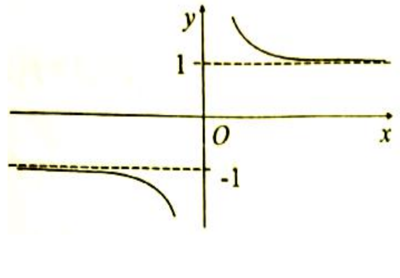


A. 小雨　　B. 中雨　　C. 大雨　　D. 暴雨

5. 在平面四边形 *ABCD* 中,已知$|\overrightarrow{AB}|=2,|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3},\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$,若$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$,则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$夹角的余弦值为　（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.已知函数 $f\left(x\right)$ 的大致图象如下，下列答案中 e 为自然对数的底数，则函数 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　　）



A. $f\left(x\right)=\frac{x}{e^x}$　　B. $f\left(x\right)=\frac{x+1}{e^x}$

C. $f\left(x\right)=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$　　D. $f\left(x\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

7. 某种芯片的良品率 X 服从正态分布 $N(0.95,0.01^2)$,公司对科技改造团队的奖励方案如下:若芯片的良品率不超过 95%,不予奖励;若芯片的良品率超过 95%但不超过 96%,每张芯片奖励 100 元;若芯片的良品率超过 96%,每张芯片奖励 200 元.则每张芯片获得奖励的数学期望为(　　)

A. 50.13 元　　B. 52.28 元　　C. 65.87 元　　D. 131.74 元

附:随机变量ξ服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,　　$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6826$,

$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9544$,　$P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)=0.9974$.

8. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（　　）

A. 甲与丙相互独立　B.丙与丁相互独立　C. 乙与丙相互独立　D. 甲与丁相互独立

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知 m,n 是两条不重合的直线,α,β是两个不重合的平面,则　(　　)

A. 若 $m\parallel\alpha,n\parallel\alpha$,则 $m\parallel n$　　B. 若 $m\parallel\alpha,m\perp\beta$,则$\alpha\perp\beta$

C. 若$\alpha\parallel\beta,m\perp\alpha,n\perp\beta$,则 $m\parallel n$　　D. 若$\alpha\perp\beta,m\parallel\alpha,n\parallel\beta$,则 $m\perp n$

10. 若 $a>0,b>0$,且 $a+b=4$,则下列不等式恒成立的是 (　　)

A. $0<\frac{1}{ab}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\sqrt{ab}<2$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant1$　　D. $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{8}$

11. 已知 $f(x)=1-2\cos^2(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，下面结论正确的是（　　）

A．若 $f(x_1)=1,f(x_2)=-1$，且$|x_1-x_2|$的最小值为 π，则 $\omega=2$

B．存在 $\omega\in(1,3)$，使得 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称

C．若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有 7 个零点，则 ω 的取值范围是$[\frac{41}{24},\frac{47}{24}]$

D．若 $f(x)$ 在$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上单调递增，则 ω 的取值范围是$\left(0,\frac{2}{3}\right]$

12. 已知 F 为抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，下列结论正确的是（　　）

A. 抛物线 $y=ax^2$ 的的焦点到其准线的距离为$\frac{1}{2a}$　.

B. 已知抛物线 C 与直线 l: $4x-3y-2p=0$ 在第一、四象限分别交于 A,B 两点，若$|\overrightarrow{AF}|=\lambda|\overrightarrow{FB}|$，则$\lambda=4$.

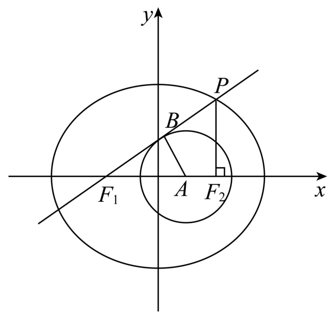
C. 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，直线 l_1 与 C 交于 A，B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D，E 两点，则四边形 $ADBE$ 面积的最小值为 $8p^2$.

D. 若过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 M，N 两点，过点 M，N 分别作抛物线 C 的切线 l_1，l_2，切线 l_1 与 l_2 相交于点 P，则点 P 在定直线上.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知多项式$(x-1)^3+(x+1)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，则$a_1+a_3=$ ________.

14. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$；过$F_1$的直线和圆$(x-\frac{1}{2}c)^2+y^2=c^2$相切，并与椭圆的第一象限交于点$P$，且$PF_2\perp x$轴，则该直线的斜率是_____，椭圆的离心率是_____.



(本题第一空 2 分,第二空 3 分)

15.已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到其准线的距离为 4，圆$M:(x-2)^2+y^2=1$，过F的直线l与抛物线C和圆M从上到下依次交于A，P，Q，B四点，则$|AP|+4|BQ|$的最小值为________.

16. 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的底面 ABC 是边长为 6 的等边三形,$PA=PB=PC=\sqrt{21}$,先在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 内放入一个内切球 O_1,然后再放入一个球 O_2,使得球 O_2 与球 O_1 及三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的三个侧面都相切,则球 O_1 的体积为________,球 O_2 的表面积为________.**(本题第一空 2 分,第二空 3 分)**

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17.（本小题满分 10 分）

设函数$f(x)=\sin x+\cos x(x\in R)$.

(1)求函数$y=[f(x+\frac{\pi}{2})]^2$的最小正周期；　　(2)求函数$y=f(x)f(x-\frac{\pi}{4})$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_1=3,S_n=a_{n+1}-1$,数列$\{b_n\}$为等差数列,$a_2=b_4$,且 $b_2+b_5=b_7$.

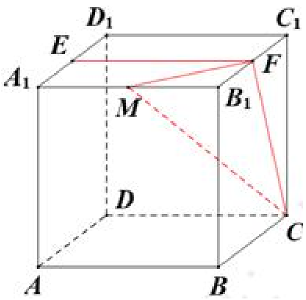
(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;　　　(2) 若 $c_n=\frac{a_nb_n}{(n+2)b_{n+1}}$,求$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

已知正方体$A\ B\ C\ D-A_1B_1C_1D_1$，点 E 为A_1D_1中点，直线B_1C_1交平面 CDE 于点 F.

(1)证明：点 F 为B_1C_1的中点；

(2)若点 M 为棱A_1B_1上一点，且二面角$M-CF-E$的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，求$\frac{A_1M}{A_1B_1}$的值.



(1)

20. （本小题满分 12 分）

已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2}$=1(a>0,b>0)的离心率为 2,A 为双曲线 C 上位于第二象限的动点.

(1)若点 A 的坐标为(-2,3),求双曲线 C 的方程;

(2)设 B,F 分别为双曲线 C 的右顶点、左焦点,是否存在常数λ,使得$\angle AFB=\lambda\angle ABF$?若存在,请求出$\lambda$的值;若不存在,请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

某地发现 6 名疑似病人中有 1 人感染病毒,需要通过血清检测确定该感染人员,血清检测结果呈阳性的即为感染人员,呈阴性表示没感染.拟采用两种方案检测:

方案甲:将这 6 名疑似病人血清逐个检测,直到能确定感染人员为止;

方案乙:将这 6 名疑似病人随机分成 2 组,每组 3 人.先将其中一组的血清混在一起检测,若结果为阳性,则表示感染人员在该组中,然后对该组中每份血清逐个检测,直到能确定感染人员为止;若结果呈阴性,则对另一组中每份血清逐个检测,直到能确定感染人员为止.

(1)求这两种方案检测次数相同的概率;

(2)如果每次检测的费用相同,请预测哪种方案检测总费用较少,并说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

(1) 已知函数 $f(x)=x-2a\ln x-\frac{1}{x}$ $(a\in\mathrm{R})$.

①试讨论函数 $f(x)$的单调性; ②若 x_1,x_2 为函数 $f(x)$的两个极值点,证明: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2-4a$.

(2)证明：$\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n<\frac{e}{e-1}$ （e 为自然对数的底数,k∈ N^*,n∈ N^*）