

南京市第 29 中学 2022 届高三学情调研(第三次)

数学试题评分细则

1-8 BACB CDCD 9BC 10 CD 11BD 12BCD

13. 12; 14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 15. 13 16. $\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$

14 解: 设圆心为 A , 直线与圆的切点为 B ,

过 F_1 的直线和圆 $(x - \frac{1}{2}c)^2 + y^2 = c^2$ 相切的直线为 l , $P(c, y_p)$, ($y_p > 0$).

将 p 点坐标代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 解得 $y_p = \frac{b^2}{a}$, 即 $PF_2 = \frac{b^2}{a}$.

由题意可得 $AB \perp F_1B$, 所以根据勾股定理可得

$$BF_1 = \sqrt{AF_1^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}c\right)^2 - c^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}c,$$

由题意 $F_1A = \frac{3}{2}c$, $AB = c$,

$$\text{故直线 } l \text{ 的斜率 } k = \tan \angle AF_1B = \frac{AB}{BF_1} = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}c\right)^2 - c^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

又

$\tan \angle AF_1$

$$B = \frac{PF_2}{F_1F_2} = \frac{b^2}{2ac} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sqrt{5}b^2 = 4ac \Rightarrow \text{结合 } b^2 = a^2 - c^2 \text{ 可得 } 5e^2 + 4\sqrt{5}e - 5 = 0,$$

解得 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $e = -\sqrt{5}$ (舍去),

所以椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}$.

16. $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{9}$ 分析: 球是由球心与半径确定的, 为此, 研究球的相关问题时, 要紧紧抓住这两个要素. 解决本题首先要作出一个简图, 注意到本题的原图很复杂, 因此, 通过作截面图来把握相互的位置关系. 根据题意可知两球必与正三棱锥的斜高相切, 故作出过球心以及切点的截面图.

设 O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心. 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形,

所以 $OA = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{3}$. 因为 $OP^2 + OA^2 = PA^2$, 解得 $OP = 3$.

设球 O_1 的半径为 R , 球 O_2 的半径为 r .

解法 1(体积法求球 O_1 的半径) 分析:球心 O_1 与三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点的连线,将三棱锥 $P-ABC$ 分成四个小三棱锥,它们的体积和等于三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

由等体积法可得, $V_{PABC}=V_{O_1PAB}+V_{O_1PAC}+V_{O_1PBC}+V_{O_1ABC}=\frac{1}{3}R(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC})=\frac{1}{3}RS_{表}$

$$\text{所以 } R=\frac{3V_{PABC}}{S_{表}}=\frac{3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3}{3\times\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

解法 2(直接法求球 O_1 的半径) 分析:由 $\triangle O_1FP \sim \triangle DOP$ 得到关于 R 的等量关系求得 R .

三棱锥 $P-ABC$ 的斜高 $PD=\sqrt{OP^2+OD^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$,

因为 $\triangle O_1FP \sim \triangle DOP$,所以 $\frac{PO_1}{PD}=\frac{FO_1}{OD}$,即 $\frac{3-R}{2\sqrt{3}}=\frac{R}{\sqrt{3}}$,解得 $R=1$.

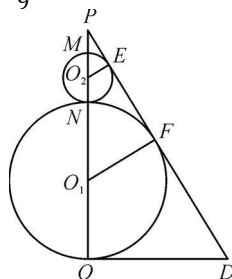
所以球 O_1 的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}$.

分析:利用 $\triangle PO_2E \sim \triangle PO_1F$ 求得球 O_2 的半径 r .

作截面图如图所示,可知 $O_1O=O_1N=1,OP=3$,则 $PN=1,PO_1=2,PO_2=1-r$.

因为 $\triangle PO_2E \sim \triangle PO_1F$,则 $\frac{PO_2}{PO_1}=\frac{O_2E}{O_1F}$,即 $\frac{1-r}{2}=\frac{r}{1}$,解得 $r=\frac{1}{3}$,

所以球 O_2 的表面积为 $S=4\pi r^2=\frac{4\pi}{9}$.



解后反思 1. 在研究较为复杂的立体几何问题时,尤其是与球有关的问题时,一般地,我们可以通过作出几何体的截面图来寻找各个相关量之间的关系.

2. 体积法是求点到平面的距离的一种常用方法,同时,也是求几何体内切球的半径的一种基本方法,它的本质是“算两次”思想的应用,即对于同一个数学对象,应用两种不同的方式进行计算,则它们的结果应该是相同的.

17. 【解析】 【解析】 (1) $\because f(x) = \sin x + \cos x$,

$$\therefore f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x - \sin x, \dots\dots\dots 1$$

$$\therefore g(x) = [f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)]^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x, \dots\dots\dots 2$$

$$\therefore y = [f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)]^2 \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi; \dots\dots\dots 3$$

$$(2) \because f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}),$$

$$\therefore f(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x, \dots\dots\dots 4$$

$$\therefore y = f(x)f(x - \frac{\pi}{4}) = (\sin x + \cos x) \cdot \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x \cos x = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x - \cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(2x - \frac{\pi}{4}), \dots\dots\dots 6$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{4} = t, \text{ 则 } -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}, h(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin t,$$

当 $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递增,

当 $\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{3\pi}{4}$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递减,

$$\text{所以 } t = 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ 函数 } h(t)_{\max} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 此时 } x = \frac{3}{8}\pi. \dots\dots\dots 9$$

综上: 函数 $y = f(x)f(x - \frac{\pi}{4})$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 10$

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=3, S_n=a_{n+1}-1$, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, $a_2=b_4$, 且 $b_2+b_5=b_7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{a_n b_n}{(n+2)b_{n+1}}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 规范解答 (1)分析:数列的前 n 项和与通项的关系,通常利用“和”与“通项”的关系 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 转化为数列的递推关系来进行处理,从而通过递推关系来求通项公式.

当 $n=1$ 时, $S_1=a_2-1$. 因为 $a_1=3$, 所以 $a_2=4$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n=a_{n+1}-1, S_{n-1}=a_n-1$,

两式相减得 $a_n=a_{n+1}-a_n$, 即 $2a_n=a_{n+1}(n \geq 2)$. (2 分)

又因为 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{3} \neq 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 从第二项起, 是公比为 2 的等比数列, 所以

$$a_n = \begin{cases} 3, & n=1, \\ 2^n, & n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

分析:等差数列的问题应用“基本量法”来解决.

设 $\{b_n\}$ 的公差为 d .因为 $a_2=b_4=4$,且 $b_2+b_5=b_7$,所以 $b_1+3d=4$ 且 $2b_1+5d=b_1+6d$,解得 $b_1=1, d=1$,所以 $b_n=n$. (6分)

(2)分析:求数列的前 n 项和首先要求它的通项公式.

$$\text{由(1)得 } c_n = \frac{a_n b_n}{(n+2)b_{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=1, \\ \frac{2^n \cdot n}{(n+1)(n+2)}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (8 \text{分})$$

分析:由于数列的通项为分式形式,因此,采用“裂项相消法”来求解.

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } c_n = \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}$$

分析:裂项相消法即将数列中的一项拆分为另一个数列的两个相邻项的差的形式.在具体拆分时可从数列的分母入手,即首先将数列的分母分解为两个因式的乘积,且它们可以看作某个数列的相邻两项,然后将两个因式分别作为两个差的分母来处理,再按此方法来拆分分子.

$$= \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}, \quad (10 \text{分})$$

$$c_1 = \frac{(1+2) \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} + \left(\frac{2^{1+1}}{1+2} - \frac{2^1}{1+1} \right),$$

$$\text{得 } T_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{2^2}{3} - \frac{2}{2} \right) + \left(\frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} \right) = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{5}{6}. \quad (12 \text{分})$$

易错警示 在利用数列的前 n 项和与通项的关系 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 时,要注意分类讨论思想的应用.同时,要注意验证 $n=1$ 时的情形是否适合 $n \geq 2$ 时的通项公式,若适合,则需“合并”;若不适合,则不能“合并”,此时数列即为分段数列.

19.(2021 北京 T17)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,点 E 为 A_1D_1 中点,直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F .

(I)证明:点 F 为 B_1C_1 的中点;

(II)若点 M 为棱 A_1B_1 上一点,且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$,求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

【答案】(I)见解析;(II) $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{1}{2}$.

【解析】本题考查了分式不等式的求解,分类讨论,由题意对不等式进行化简,分类讨论当

$a = 0$ 时, $a \neq 0$ 时, 不等式的解集.

【解析】(I) 证明: 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体,

所以 $A_1D_1 // B_1C_1$, $CD // C_1D_1$,

又因为 $CD \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $C_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

所以 $CD //$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 2

因为平面 $CDEF \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = EF$, 且 $CD \subset$ 平面 $CDEF$,

所以 $CD // EF$, 故 $C_1D_1 // EF$, 4

所以四边形 EFC_1D_1 为矩形, 又点 E 为 A_1D_1 中点,

故 $C_1F = D_1E = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}C_1B_1$,

故点 F 为 B_1C_1 的中点; 5

(II) 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 故 DA , CD , DD_1 两两垂直,

以 D 为坐标原点, 分别以 DA , CD , DD_1 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 6

令正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 设 $\overrightarrow{A_1M} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$),

则 $C(0, 2, 0)$, $E(1, 0, 2)$, $F(1, 2, 2)$, $M(2, 2\lambda, 2)$

$\overrightarrow{CE} = (1, -2, 2)$, $\overrightarrow{CF} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{CM} = (2, 2\lambda - 2, 2)$,

设平面 CEF 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{CE} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0 \\ x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$,

故 $y_1 = 0$, 令 $z_1 = -1$, $x_1 = 2$, 可取 $\vec{n}_1 = (2, 0, -1)$, 7

设平面 CMF 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2x_2 + (2\lambda - 2)y_2 + 2z_2 = 0 \\ x_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$,

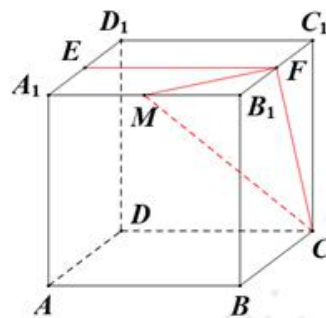
令 $z_2 = -1$, 则 $x_2 = 2$, $y_2 = \frac{1}{1-\lambda}$,

可取 $\vec{n}_2 = (2, \frac{1}{1-\lambda}, -1)$, 9

设二面角 $M - CF - E$ 为 θ , 且 θ 为锐角,

$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{4 + 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (\frac{1}{1-\lambda})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1]$, 故 $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{1}{2}$ 12



20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, A 为双曲线 C 上位于第二象限的动点.

(1) 若点 A 的坐标为 $(-2, 3)$, 求双曲线 C 的方程;

(2) 设 B, F 分别为双曲线 C 的右顶点、左焦点, 是否存在常数 λ , 使得 $\angle AFB = \lambda \angle ABF$? 若存在, 请求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

20. 规范解答 解: (1) 分析: 利用双曲线的离心率和双曲线点的坐标列出 a, b, c 的方程组即可求解.

由离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$, 得 $c = 2a$,

又 $b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2$, 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$, 2

把点 $A(-2, 3)$ 代入双曲线方程得 $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{3a^2} = 1$, 解得 $a^2 = 1$,

故双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. (4 分)

(2) 分析: 由于 $\angle AFB, \angle ABF$ 与两直线 AF 和 AB 倾斜角有关, 所以从两直线斜率入手探究, 但先要考虑斜率不存在的情况.

由(1)知双曲线方程 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$, 所以 $B(a, 0), F(-2a, 0)$.

① 当直线 AF 的斜率不存在时, 则 $\angle AFB = 90^\circ, FB = 3a, AF = \frac{b^2}{a} = 3a$,

所以 $\angle ABF = 45^\circ$, 此时 $\lambda = 2$. (6 分)

分析: 由特殊情况得 $\lambda = 2$, 为下面的探究提供了方向.

② 当直线 AF 的斜率存在时, 设 $\angle AFB = \alpha, \angle ABF = \beta, A(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 < -a, y_0 > 0$.

因为 $e = 2$, 故 $c = 2a$, 故渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{3}x$,

所以 $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3}), \beta \in (0, \frac{\pi}{3})$, 7

又 $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0 + 2a}, \tan \beta = \frac{y_0}{x_0 - a}$, (8 分)

所以 $\tan 2\beta = \frac{\frac{2y_0}{x_0 - a}}{1 - \left(\frac{y_0}{x_0 - a}\right)^2} = \frac{-2y_0(x_0 - a)}{(x_0 - a)^2 - y_0^2}$

$$= \frac{-2y_0(x_0-a)}{(x_0-a)^2-3a^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)} = \frac{-2y_0(x_0-a)}{(x_0-a)^2-3(x_0^2-a^2)}$$

$$= \frac{-2y_0}{(x_0-a)-3(x_0+a)} = \frac{y_0}{x_0+2a},$$

所以 $\tan \alpha = \tan 2\theta$, 11

又 $\alpha, 2\theta \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $\alpha = 2\theta$.

综上, 存在常数 $\lambda=2$, 满足 $\angle AFB = 2\angle ABF$. (12 分)

解后反思 解题过程中, 合情推理也有着重要的作用, 解题时可以先从特殊情况进行合理的猜想, 有了解题方向和明确的目标再进行推理、论证.

21. (本小题满分 12 分)

某地发现 6 名疑似病人中有 1 人感染病毒, 需要通过血清检测确定该感染人员, 血清检测结果呈阳性的即为感染人员, 呈阴性表示没感染. 拟采用两种方案检测:

方案甲: 将这 6 名疑似病人血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止;

方案乙: 将这 6 名疑似病人随机分成 2 组, 每组 3 人. 先将其中一组的血清混在一起检测, 若结果为阳性, 则表示感染人员在该组中, 然后对该组中每份血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止; 若结果呈阴性, 则对另一组中每份血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止.

(1) 求这两种方案检测次数相同的概率;

(2) 如果每次检测的费用相同, 请预测哪种方案检测总费用较少, 并说明理由.

21. 规范解答

解: (1) 设方案甲中检测次数为 X , 则 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4, 5; (1 分)

设方案乙中检测次数为 Y , 则 Y 的可能取值为 2, 3. (2 分)

$$P(X=1) = \frac{C_1^1}{C_6^1} = \frac{1}{6}, \quad P(X=2) = \frac{A_5^1 \cdot C_1^1}{A_6^2} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=3) = \frac{A_5^2 \cdot C_1^1}{A_6^3} = \frac{1}{6}, \quad P(X=4) = \frac{A_5^3 \cdot C_1^1}{A_6^4} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=5) = \frac{A_5^4 \cdot C_1^1 + A_5^5}{A_6^5} = \frac{1}{3},$$

$$P(Y=2)=\frac{C_5^2 \cdot C_2^1}{C_6^3 \cdot C_3^1}=\frac{1}{3},$$

$$P(Y=3)=\frac{C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_6^3 \cdot C_3^1}=\frac{2}{3},$$

则 X, Y 的分布列分别为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(4 分)

Y	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(6 分)

记“两种方案检测次数均为 2”为事件 A ,

记“两种方案检测次数均为 3”为事件 B , 则事件 A, B 互斥,

记“两种方案检测次数相同”为事件 C ,

又采用甲方案和乙方案的各事件之间是独立的, 所以

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=P(X=2, Y=2)+P(X=3, Y=3)=P(X=2) \times P(Y=2)+P(X=3) \times P(Y=3)=\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}+\frac{1}{6} \times \frac{2}{3}=\frac{1}{6}.$$

(8 分)

$$(2) E(X)=1 \times \frac{1}{6}+2 \times \frac{1}{6}+3 \times \frac{1}{6}+4 \times \frac{1}{6}+5 \times \frac{1}{3}=\frac{10}{3},$$

$$E(Y)=2 \times \frac{1}{3}+3 \times \frac{2}{3}=\frac{8}{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

因为 $E(X) > E(Y)$, 所以乙方案检测总费用较少. (11 分)

答:(1)这两种分组方案检测次数相同的概率为 $\frac{1}{6}$.

(2)预测乙方案分组检测总费用较少. (12 分)

(1) 由题意, 可设甲方案检测的次数是 X , 则 $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 设乙方案检测的次数是 Y , 则 $Y \in \{2, 3\}$, 方案甲与方案乙相互独立,

$$P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = P(X_4) = \frac{1}{6}$$

$$, P(X_5) = \frac{1}{3}$$

$$, P(Y_2) = \frac{C_5^2}{C_6^3 C_3^1} + \frac{C_5^3}{C_6^3 C_3^1} = \frac{1}{3},$$

$$P(Y_3) = 1 - P(Y_2) = \frac{2}{3},$$

用事件 D 表示方案甲所需检测的次数等于方案乙所需检测的次数,

则

$$P(D) = P(X_2 Y_2 + X_3 Y_3) = P(X_2)P(Y_2)$$

$$+ P(X_3)P(Y_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

,
 所以这两种方案检测次数相同的概率为 $\frac{1}{6}$;

22. (本小题满分 12 分)

(1) 已知函数 $f(x) = x - 2a \ln x - \frac{1}{x} (a \in \mathbb{R})$.

① 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

② 若 x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2 - 4a$.

(2) 证明: $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n < \frac{e}{e-1}$ (e 为自然对数的底数)

21. (1) 规范解答 ① 解: 分析: 直接通过分类讨论, 利用导数讨论函数 $f(x)$ 的单调性即可.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2}, x > 0, \text{ 令 } x^2 - 2ax + 1 = 0, \Delta = 4a^2 - 4, \dots\dots\dots$$

当 $\Delta \leq 0$, 即 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;1

当 $\Delta > 0$, 即 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时,

当 $a < -1$ 时, $ax < 0$, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;2

当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0, x_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}, x_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$.

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

.....3

综上, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a - \sqrt{a^2 - 1}), (a + \sqrt{a^2 - 1}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a - \sqrt{a^2 - 1}, a + \sqrt{a^2 - 1})$ 上单调递减. (4 分)

②分析: 利用极值点的必要条件, 以及根与系数的关系, 通过消元, 构造函数进行证明.

证明: 由(1)知 $a > 1$ 时 $f(x)$ 才有两个极值点 x_1, x_2 ,

且 $x_1 + x_2 = 2a, x_1 x_2 = 1$, 不妨设 $x_2 > 1 > x_1 > 0$,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\left(x_1 - 2a \ln x_1 - \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 - 2a \ln x_2 - \frac{1}{x_2}\right)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) - 2a \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = 2 - \frac{2a \ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} \dots\dots\dots 6$$

要证 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2 - 4a$, 即证 $\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} < 2$, 即 $\frac{\ln x_2^2}{x_2 - \frac{1}{x_2}} < 2$,

即证 $\ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0$.

设 $g(t) = \ln t - t + \frac{1}{t} (t > 1)$, 由(1)知当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(t) = -f(t)$,

则 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(t) < g(1) = 0$. 原式得证. (9 分)

(2)

