

南京市 2022 届高三年级零模考前复习卷

数学

2021.08

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分）

1. 已知复数 $z=1+i$ ，设复数 $w=\frac{2\bar{z}}{z^2}$ ，则 w 的虚部是（ ）

- A. -1 B. 1 C. i D. $-i$

2. 已知 a, b 为非零实数，则“ $a < b$ ”是“ $\frac{a}{|b|} < \frac{b}{|a|}$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 既不充分也不必要条件 D. 充要条件

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$ ， $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{OD}$ ，则 $\lambda=$ （ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

4. 棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F, G 分别为棱 AB, CC_1, C_1D_1 的中点，则过 E, F, G 三点的平面截正方体所得截面面积为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

5. 若 θ 为锐角， $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ，则 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=$ （ ）

- A. $\frac{12}{25}$ B. $\frac{25}{12}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $\frac{7}{24}$

6. 将正整数 12 分解成两个正整数的乘积有 $1\times 12, 2\times 6, 3\times 4$ 三种，其中 3×4 是这三种分解中两数差的绝对值最小的，我们称 3×4 为 12 的最佳分解. 当 $p\times q(p, q\in\mathbb{N}^*)$ 是正整数 n 的最佳分解时，我们定义函数 $f(n)=|p-q|$ ，例如 $f(12)=|4-3|=1$ ，则

$\sum_{i=1}^{2021} f(2^i)=$ （ ）

- A. $2^{1011}-1$ B. 2^{1011} C. $2^{1010}-1$ D. 2^{1010}

7. 过点 $M(p, 0)$ 作倾斜角为 150° 的直线与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于两点 A, B ,

若 $|AB| = 2\sqrt{10}$, 则 $|AM| \cdot |BM|$ 的值为 ()

- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{5}$

8. 已知 $a > 1, b > 1$, 且 $\frac{e^a}{a} = \frac{e^{b+1} + 1}{b+1}$, 则下列结论一定正确的是 ()

- A. $\ln(a+b) > 2$ B. $\ln(a-b) > 0$
C. $2^{a+1} < 2^b$ D. $2^a + 2^b < 2^3$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分. 每题全选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 图象的一条对称轴为 $x = \frac{2\pi}{3}$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 内单调递减, 则以下说法正确的是 ()

- A. $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 是其中一个对称中心 B. $\omega = \frac{14}{5}$
C. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 单增 D. $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $C = \frac{\pi}{2}$, 将 $\triangle ABC$ 分别

绕边 a, b, c 所在的直线旋转一周, 形成的几何体的体积分别记为 V_a, V_b, V_c , 侧面积

分别记为 S_a, S_b, S_c , 则 ()

- A. $V_a + V_b \geq 2V_c$ B. $S_a + S_b \geq 2S_c$
C. $\frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2} = \frac{1}{V_c^2}$ D. $\frac{1}{S_a^2} + \frac{1}{S_b^2} = \frac{1}{S_c^2}$

11. 设集合 $S, T, S \subseteq \mathbb{N}^*, T \subseteq \mathbb{N}^*, S, T$ 中至少有两个元素, 且 S, T 满足:

① 对于任意 $x, y \in S$, 若 $x \neq y$, 都有 $xy \in T$

② 对于任意 $x, y \in T$, 若 $x < y$, 则 $\frac{y}{x} \in S$;

下列情况中可能出现的有 ()

- A. S 有 4 个元素, $S \cup T$ 有 7 个元素 B. S 有 4 个元素, $S \cup T$ 有 6 个元素
C. S 有 3 个元素, $S \cup T$ 有 5 个元素 D. S 有 3 个元素, $S \cup T$ 有 4 个元素

12. 甲、乙两人进行围棋比赛，共比赛 $2n (n \in \mathbb{N}^*)$ 局，且每局甲获胜的概率和乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$. 如果某人获胜的局数多于另一人，则此人赢得比赛. 记甲赢得比赛的概率为

$P(n)$ ，则 ()

A. $P(2) = \frac{1}{8}$

B. $P(3) = \frac{11}{32}$

C. $P(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \right)$

D. $P(n)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分)

13. 已知 $f(x) = \tan x \cdot (e^x + e^{-x}) + 6$ ， $f(t) = 8$ ，则 $f(-t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 根据下面的数据：

x	1	2	3	4
y	32	48	72	88

求得 y 关于 x 的回归直线方程为 $y = 19.2x + 12$ ，则这组数据相对于所求的回归直线方程的 4 个残差的方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (注：残差是指实际观察值与估计值之间的差)

15. 斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 相交于 A, B 两点，线段

AB 的中点坐标为 $(1, 1)$ ，则椭圆 C 的离心率等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. “韩信点兵”问题在我国古代数学史上有不少有趣的名称，如“物不知数”“鬼谷算”“隔墙算”“大衍求一术”等，其中《孙子算经》中“物不知数”问题的解法直至 1852 年传由传教士传入至欧洲，后验证符合由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”. 原文如下：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”这是一个已知某数被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2，求此数的问题. 满足条件的数中最小的正整数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；1 至 2021 这 2021 个数中满足条件的数的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题 (本大题共 6 小题，共 70 分)

17. (本题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ， $\cos B = \frac{11}{16}$.

(1) 证明： $a: b: c = 2: 3: 4$ ；

(2) 若 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = 8$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本题满分 12 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_2 = 3$, 且 $S_5 = 4a_3 + 5$.

(1) 求 a_n 和 S_n ;

(2) 是否存在等差数列 $\{b_n\}$, 使得 $\frac{S_1}{a_1 a_2} + \frac{S_2}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{S_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{n b_n}{a_{n+1}}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立? 并证明你的结论.

19. (本题满分 12 分)

为保护学生视力, 让学生在学校专心学习, 防止沉迷网络和游戏, 促进学生身心健康发展, 教育部于 2021 年 1 月 15 日下发《关于加强中小学生手机管理工作的通知》, 对中小学生的手机使用和管理作出了相关的规定. 某研究型学习小组调查研究“中学生使用智能手机对学习的影响”, 现对我校 80 名学生调查得到统计数据如下表, 记 A 为事件: “学习成绩优秀且不使用手机”; B 为事件: “学习成绩不优秀且不使用手机”, 且已知事件 A 的频率是事件 B 的频率的 2 倍.

	不使用手机	使用手机	合计
学习成绩优秀人数	a	12	
学习成绩不优秀人数	b	26	
合计			

(1) 运用独立性检验思想, 判断是否有 99.5% 的把握认为中学生使用手机对学习成绩有影

响？

(2) 采用分层抽样的方法从这 80 名学生中抽出 6 名学生，并安排其中 3 人做书面发言，记做书面发言的成绩优秀的学生数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

参考数据： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20. (本题满分 12 分)

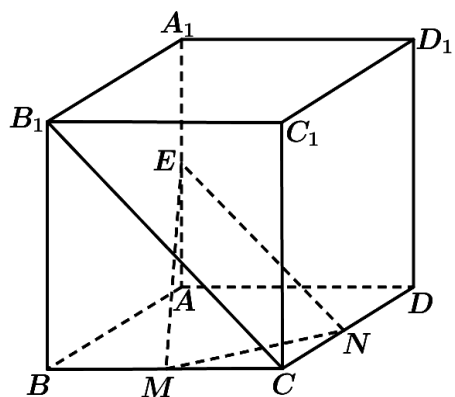
如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，面 $ABB_1A_1 \perp$ 面 $ABCD$ ，面 $ADD_1A_1 \perp$ 面 $ABCD$ ，

点 E 、 M 、 N 分别是棱 AA_1 、 BC 、 CD 的中点.

(1) 证明： $AA_1 \perp$ 面 $ABCD$.

(2) 若四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $AA_1 = AD$ ，面 $EMN \cap$ 面 $ADD_1A_1 =$ 直线

l ，求直线 l 与 B_1C 所成角的余弦值.



21. (本题满分 12 分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $D(3, 1)$, 且该双曲线的虚轴端点与两顶点

A_1, A_2 的张角为 120° .

(1) 求双曲线 E 的方程;

(2) 过点 $B(0, 4)$ 的直线 l 与双曲线 E 左支相交于点 M, N , 直线 DM, DN 与 y 轴相交于

P, Q 两点, 求 $|BP| + |BQ|$ 的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)(ae^x - 1)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = (e-1)(x-1)$,

(1) 求 a 的值;

(2) 若方程 $f(x) = b$ 有两个不同实根 x_1, x_2 , 证明: $|x_1 - x_2| < \frac{eb}{e-1} + 1$

南京市 2022 届高三年级零模考前复习卷答案

数学

2021.08

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	C	C	B	A	A	B

二、多项选择题

9	10	11	12
AD	ABC	ACD	BC

三、填空题

13. 4 14. 3.2 15. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 16. 23 , 20

四、解答题

17. (1) 由 $\cos B = \frac{11}{16}$, 可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3\sqrt{15}}{16} > \sin A$,

所以 $A < B$, 所以 A 为锐角, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{7}{8}$,

所以 $\sin C = \sin(A + B) = \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{11}{16} + \frac{7}{8} \times \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

由正弦定理可得 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \frac{\sqrt{15}}{8} : \frac{3\sqrt{15}}{16} : \frac{\sqrt{15}}{4} = 2 : 3 : 4$.

(2) 由 (1) 知 $\cos C = -\cos(A + B) = -\frac{1}{4}$,

所以

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = b^2 + a^2 - 2ab \cos C = b^2 + a^2 + \frac{ab}{2} = 64,$$

设 $a = 2t$, $b = 3t$, $c = 4t$, 则 $b^2 + a^2 + \frac{ab}{2} = 9t^2 + 4t^2 + 3t^2 = 64$, 解得 $t = 2$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $9t = 18$.

18. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 3 \\ 5a_1 + 10d = 4(a_1 + 2d) + 5 \end{cases}$,

解得 $a_1=1$, $d=2$,

$$\therefore a_n = 2n-1, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = n^2;$$

$$(2) \text{ 设 } T_n = \frac{S_1}{a_1 a_2} + \frac{S_2}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{S_n}{a_n a_{n+1}}, \text{ 由 } \frac{1}{3} = \frac{b_1}{3} \text{ 可得 } b_1 = 1,$$

$$\text{由 } T_2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{2}{5} b_2, \text{ 可得 } b_2 = \frac{3}{2},$$

故存在等差数列 $\{b_n\}$ 满足条件, 其中 $b_n = \frac{n+1}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$,

下面用数学归纳法证明: 当 $b_n = \frac{n+1}{2}$ 时, $T_n = \frac{n b_n}{a_{n+1}}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立,

①当 $n=1$ 时, 由上面过程可知, 等式成立,

$$\text{②假设 } n=k \text{ 时等式成立, 即 } T_k = \frac{k b_k}{a_{k+1}} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)},$$

$$\text{则当 } n=k+1 \text{ 时, } T_{k+1} = T_k + \frac{S_{k+1}}{a_{k+1} a_{k+2}}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)},$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)b_{k+1}}{a_{k+2}},$$

即当 $n=k+1$ 时等式成立,

由①②可知 $\frac{S_1}{a_1a_2} + \frac{S_2}{a_2a_3} + \cdots + \frac{S_n}{a_na_{n+1}} = \frac{nb_n}{a_{n+1}}$, (其中 $b_n = \frac{n+1}{2}$) 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.

19. (1) 由已知得
$$\begin{cases} a+b+12+26=80, \\ a=2b \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=28, \\ b=14, \end{cases}$$

补全表中所缺数据如下：

	不使用手机	使用手机	合计
学习成绩优秀人数	28	12	40
学习成绩不优秀人数	14	26	40
合计	42	38	80

根据题意计算观测值为 $K^2 = \frac{80 \times (28 \times 26 - 14 \times 12)^2}{42 \times 38 \times 40 \times 40} \approx 9.825 > 7.879$,

所以有 99.5%的把握认为中学生使用手机对学习有影响.

(2) 根据题意由分层抽样方法可知，抽取成绩优秀的学生 3 名，成绩不优秀的学生 3 名.

从而 x 的所有可能取值为 0,1,2,3,

且 $P(x=0) = \frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$, $P(x=1) = \frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}$, $P(x=2) = \frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$,

$P(x=3) = \frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{20}$,

所以 x 的分布列为

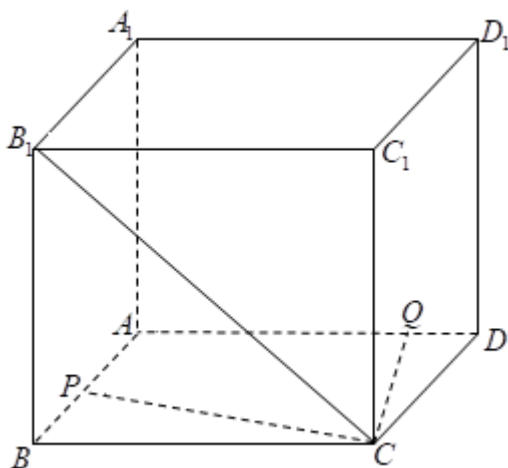
x	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

x 的数学期望为 $E(x) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{2}$.

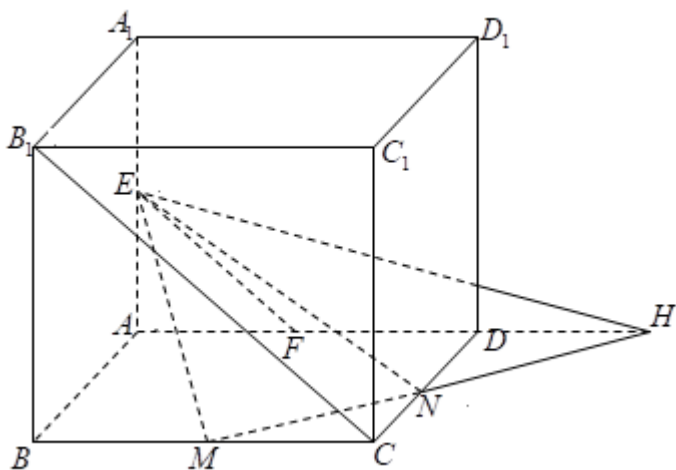
20. (1) 如图所示，在底面 $ABCD$ 中，过点 C 分别作 $CP \perp AB$ ， $CQ \perp AD$

因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面面 $ABCD$ ， $ABB_1A_1 \cap ABCD = AB$ ，且 $CP \subset$ 平面 $ABCD$ ，

又因为 $CP \cap CQ = C$ ，且 $CP, CQ \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ 。



即直线 l 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



21. (1) 由已知

$$\begin{cases} a = \sqrt{3}b \\ \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad \therefore \begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = 2 \end{cases} \therefore \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

(2) 设直线方程为 $y = kx + 4$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{直线 } DM \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 3}(x - 3), \text{ 可得 } P\left(0, 1 - \frac{3(y_1 - 1)}{x_1 - 3}\right)$$

$$\text{直线 } DN \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 3}(x - 3), \text{ 可得 } Q\left(0, 1 - \frac{3(y_2 - 1)}{x_2 - 3}\right)$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + 4 \\ \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } (1 - 3k^2)x^2 - 24kx - 54 = 0.$$

$$\begin{cases} \Delta = 24^2 k^2 + 4 \times (1 - 3k^2) \times 54 > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{24k}{1 - 3k^2} < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{-54}{1 - 3k^2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{可得 } \frac{\sqrt{3}}{3} < k < \sqrt{3}$$

$$|BP| + |BQ| = 4 - y_M + 4 - y_N = 6 + \frac{3(y_1 - 1)}{x_1 - 3} + \frac{3(y_2 - 1)}{x_2 - 3}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 + 3 \times \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 3) + (y_2 - 1)(x_1 - 3)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} \\
&= 6 + 3 \times \frac{(kx_1 + 3)(x_2 - 3) + (kx_2 + 3)(x_1 - 3)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} \\
&= 6 + 3 \times \frac{2kx_1x_2 + (3 - 3k)(x_1 + x_2) - 18}{x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9} \\
&= 6 + 3 \times \frac{2k \times \frac{-54}{1-3k^2} + (3-3k) \times \frac{24k}{1-3k^2} - 18}{\frac{-54}{1-3k^2} - 3 \times \frac{24k}{1-3k^2} + 9} \\
&= \frac{24k^2 + 60k + 36}{3k^2 + 8k + 5} = \frac{24k + 36}{3k + 5} = 8 - \frac{4}{3k + 5}
\end{aligned}$$

又 $\frac{\sqrt{3}}{3} < k < \sqrt{3}$, 所以 $|BP| + |BQ|$ 的范围是 $\left(\frac{78+2\sqrt{3}}{11}, 18-6\sqrt{3}\right)$.

22. (1) $\because f'(x) = ae^x - 1 + (x-1) \cdot ae^x, \therefore k = f'(1) = ae - 1 = e - 1, \therefore a = 1;$

(2) 由 (1) 得 $f'(x) = xe^x - 1$, 又 $f'(0) = -1 < 0$, $f'(1) = e - 1 > 0$, 且 $f'(x) = xe^x - 1$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增

所以 $f'(x) = xe^x - 1 = 0$ 有唯一实根 $x_0 \in (0, 1)$,

$x \in (-\infty, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增, 故两根分别在 $(-\infty, x_0)$ 与 $(x_0, +\infty)$ 内, 不妨设 $x_1 < x_2$,

设 $g(x) = f(x) - (e-1)(x-1)$, $x \in (x_0, +\infty)$, 则 $g'(x) = x \cdot e^x - e$,

$x \in (x_0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减, $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增, $\therefore g(x)$

有最小值 $g(1) = 0$, 即 $f(x) \geq (e-1)(x-1)$ 恒成立, $b = f(x_2) \geq (e-1)(x_2 - 1)$,

$\therefore x_2 \leq \frac{b}{e-1} + 1$, 又因为函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = -x$, 所以 $f(x) \geq -x$ 恒成

立, $b = f(x_1) \geq -x_1$,

$\therefore x_1 \geq -b$, 于是 $|x_1 - x_2| \leq \frac{b}{e-1} + 1 + b = \frac{eb}{e-1} + 1$.