

南京市 2021 届高三年级第三次模拟考试

数 学

2021.05

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

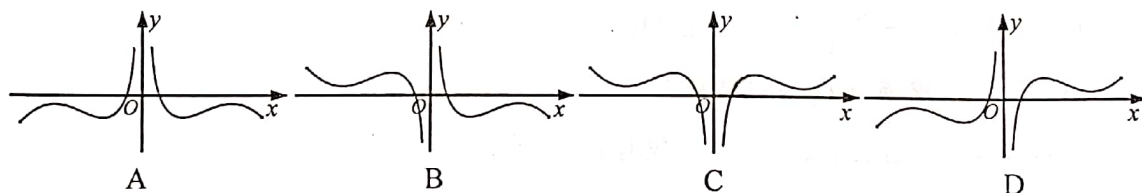
1. 已知集合 $A = \{x | 2^x < 4\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $[-1, 2)$ B. $(2, 3]$ C. $(-1, 3]$ D. $(-\infty, 3]$

2. 已知 i 为虚数单位, 若复数 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则复数 $\frac{1}{z}$ 的虚部为

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 函数 $y = \ln|x| + \cos x$ 的大致图象是



4. 将 5 名学生分配到 A, B, C, D, E 这 5 个社区参加义务劳动, 每个社区分配 1 名学生, 且学生甲不能分配到 A 社区, 则不同的分配方法种数是

- A. 72 B. 96 C. 108 D. 120

5. 已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) + \cos^2(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12})$ 的值为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ D. 1



6. 声音的强弱可以用声波的能流密度来计算,叫做声强.通常人耳能听到声音的最小声强为 $I_0=10^{-12}$ (瓦/米²). 对于一个声音的声强 I ,用声强 I 与 I_0 比值的常用对数的10 倍表示声强 I 的声强级,单位是“分贝”,即声强 I 的声强级是 $10\lg \frac{I}{I_0}$ (分贝). 声音传播时,在某处听到的声强 I 与该处到声源的距离 s 的平方成反比,即 $I=\frac{k}{s^2}$ (k 为常数). 若在距离声源 15 米的地方,听到声音的声强级是 20 分贝,则能听到该声音(即声强不小于 I_0)的位置到声源的最大距离为

- A. 100 米 B. 150 米 C. 200 米 D. $15\sqrt{10}$ 米

7. 在正方形 $ABCD$ 中, O 为两条对角线的交点, E 为边 BC 上的动点. 若 $\overrightarrow{AE}=\lambda \overrightarrow{AC}+\mu \overrightarrow{DO}$ ($\lambda, \mu>0$),则 $\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 的最小值为

- A. 2 B. 5 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{14}{3}$

8. 已知 a, b, c 均为不等于 1 的正实数,且 $\ln a = c \ln b, \ln c = b \ln a$,则 a, b, c 的大小关系是

- A. $c>a>b$ B. $b>c>a$ C. $a>b>c$ D. $a>c>b$

二、多项选择题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 面对新冠肺炎疫情冲击,我国各地区各部门统筹疫情防控和经济社会发展均取得显著成效. 下表显示的是 2020 年 4 月份到 12 月份中国社会消费品零售总额数据,其中同比增长率是指和去年同期相比较的增长率,环比增长率是指与上个月份相比较的增长率,则下列说法正确的是

中国社会消费品零售总额

月 份	零售总额(亿元)	同比增长	环比增长	累计(亿元)
4	28178	-7.50%	6.53%	106758
5	31973	-2.80%	13.47%	138730
6	33526	-1.80%	4.86%	172256
7	32203	-1.10%	-3.95%	204459
8	33571	0.50%	4.25%	238029
9	35295	3.30%	5.14%	273324
10	38576	4.30%	9.30%	311901
11	39514	5.00%	2.43%	351415
12	40566	4.60%	2.66%	391981

- A. 2020 年 4 月份到 12 月份,社会消费品零售总额逐月上升
 B. 2020 年 4 月份到 12 月份,11 月份同比增长率最大
 C. 2020 年 4 月份到 12 月份,5 月份环比增长率最大
 D. 第 4 季度的月消费品零售总额相比第 2 季度的月消费品零售总额,方差更小



10. 定义曲线 $\Gamma: \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的伴随曲线, 则
- A. 曲线 Γ 有对称轴
B. 曲线 Γ 没有对称中心
C. 曲线 Γ 有且仅有 4 条渐近线
D. 曲线 Γ 与椭圆 C 有公共点
11. 已知正四棱台的上底面边长为 $\sqrt{2}$, 下底面边长为 $2\sqrt{2}$, 侧棱长为 2, 则
- A. 棱台的侧面积为 $6\sqrt{7}$
B. 棱台的体积为 $14\sqrt{3}$
C. 棱台的侧棱与底面所成角的余弦值为 $\frac{1}{2}$
D. 棱台的侧面与底面所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$
12. 已知函数 $f(x) = 3\sin 2x + 4\cos 2x$, $g(x) = f(x) + |f(x)|$. 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(x_0)$, 则
- A. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x+x_0) = f(x-x_0)$
B. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(x_0 + \frac{\pi}{2})$
C. 存在 $\theta > 0$, 使得 $g(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \theta)$ 上有且仅有 2 个零点
D. 存在 $\theta > -\frac{5\pi}{12}$, 使得 $g(x)$ 在 $(x_0 - \frac{5\pi}{12}, x_0 + \theta)$ 上单调递减

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $(3x^2 + \frac{1}{x^3})^5$ 的展开式中的常数项为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 写出一个离心率为 $\sqrt{5}$, 渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 的双曲线方程为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 早在 15 世纪, 达·芬奇就曾提出一种制作正二十面体的方法: 如图 1, 先制作三张一样的黄金矩形 $ABCD$ ($\frac{\text{短边}}{\text{长边}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$), 然后从长边 CD 的中点 E 出发, 沿着与短边平行的方向剪开一半, 即 $OE = \frac{1}{2}AD$, 再沿着与长边 AB 平行的方向剪出相同的长度, 即 $OF = OE$, 将这三个矩形穿插两两垂直放置, 连结所有顶点即可得到一个正二十面体, 如图 2. 若黄金矩形的短边长为 4, 则按如上制作的正二十面体的表面积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$, 其外接球的表面积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

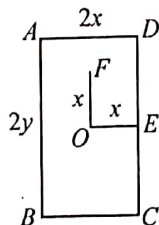


图1

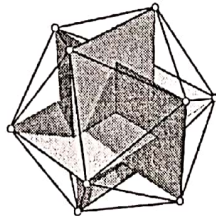


图2

16. 已知直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = x^2 + \cos x$ 相切, 则 $\frac{k\pi}{2} + b$ 的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分10分)

已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , $AB=2BC=2CD=4$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{2}{3}\pi$, $AC=3$, 求 $\cos \angle CAD$;

(2) 若 $AE=CE$, $BE=2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本题满分12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: a_1+3, a_3, a_4 成等差数列, 且 a_1, a_3, a_8 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在任意相邻两项 a_k 与 a_{k+1} ($k=1, 2, \dots$) 之间插入 2^k 个2, 使它们和原数列的项构成一个新数列 $\{b_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求满足 $S_n < 500$ 的 n 的最大值.

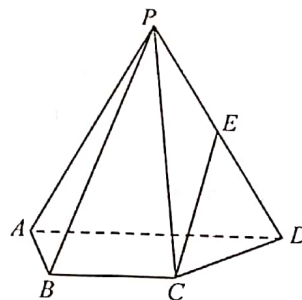


19. (本题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 2BC = 2AB = 4$, $\triangle PAD$ 为等边三角形, E 为 PD 的中点, 直线 AB 与 CE 所成角的大小为 45° .

(1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



(第19题图)

20. (本小题满分 12 分)

某乒乓球教练为了解某同学近期的训练效果, 随机记录了该同学 40 局接球训练成绩, 每局训练时教练连续发 100 个球, 该同学每接球成功得 1 分, 否则不得分, 且每局训练结果相互独立, 得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 同一组数据用该区间的中点值作代表,

① 求该同学 40 局接球训练成绩的样本平均数 $\bar{x}$.

② 若该同学的接球训练成绩 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, 100)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, 求 $P(54 < X < 64)$ 的值;

(2) 为了提高该同学的训练兴趣, 教练与他进行

比赛. 一局比赛中教练连续发 100 个球, 该同学得分达到 80 分为获胜, 否则教练获胜.

若有人获胜达 3 局, 则比赛结束, 记比赛的局数为 Y . 以频率分布直方图中该同学获胜

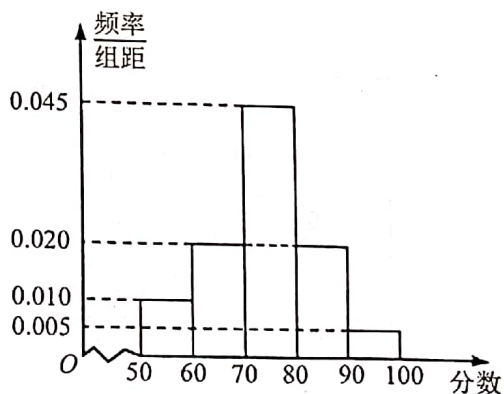
的频率作为概率, 求 $E(Y)$.

参考数据: 若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,

则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$,

$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.



(第20题图)



21. (本题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 经过 $P(t, 0) (t > 0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点.

(1) 若 $t = 4$, 求 AP 长度的最小值;

(2) 设以 AB 为直径的圆交 x 轴于 M, N 两点, 问是否存在 t , 使得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -4$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{x} + a \ln x, a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a < e$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a > e$, 求证: 函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点.

