2020-2021 学年南京六校联合体暑假学情检测

数学

2020.9.1

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-x-2\le 0\right\}$， $B=\left\{x \mid y=\sqrt{x}\right\}$，则 $A\cup B=$ （　　）

A． $\{x \mid -1\le x\le 2\}$　　B． $\{x \mid 0\le x\le 2\}$　　C． $\{x \mid x\ge -1\}$　　D． $\{x \mid x\ge 0\}$

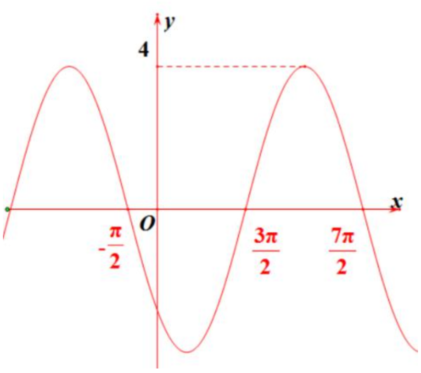
2．已知复数满足 $z=-1+\sqrt{3}i$， 则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$ （　　）

A． $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　B． $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　C． $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　D． $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3．若 a,b,c 满足 $2^a=3, b=\log_2 5, c=\log_3 2$ 则 （　　）

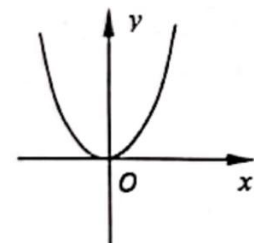
A． $c<a<b$　　B． $b<c<a$　　C． $a<b<c$　　D． $c<b<a$

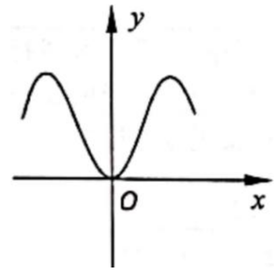
4．已知函数的图像 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|\le\pi)$ 如图所示，则 （　　）

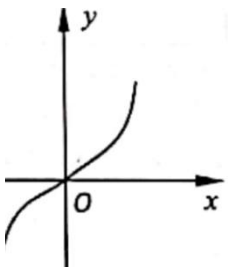


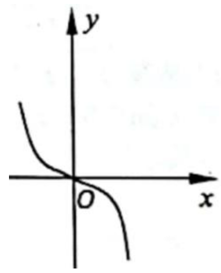
A． $\omega=2,\varphi=\pi$　　B． $\omega=2,\varphi=\dfrac{\pi}{2}$　　C． $\omega=\dfrac{1}{2},\varphi=\dfrac{\pi}{4}$　　D． $\omega=\dfrac{1}{2},\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$

5．函数 $f(x)=\dfrac{x(2^{x}+2^{-x})}{2+\cos x}$ 的部分图像大致为　　　　(　　)

A． 

B． 

C． 

D． 

6．某校有 1000 人参加某次模拟考试，其中数学考试成绩近似付出正态分布 $N(105,\sigma^{2})$，$(\sigma>0)$，试卷满分 150 分，统计结果显示数学成绩优秀（高于 120 分）的人数占总人数的 $\dfrac{1}{5}$，则此次数学考试成绩在 90 分到 105 分之间的人数约为　　　　(　　)

A．150　　B．200　　C．300　　D．400

7．《张丘建算经》是我国古代数学名著，书中有如下问题："今有懒女不善织，日减功迟，初日织七尺，末日织一尺，今三十织迄，问织几何?"其意思为：有个懒惰的女子不善于织布，每天比前一天少织同样多的布，第一天织七尺，最后一天织一尺，三十天织完，问三十天共织布多少尺?　　　　(　　)

A．90　　B．120　　C． 140　　D．150

8．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AP=3$，$AB=2\sqrt{3}$，$Q$ 是边 BC 上的一动点，且直线 PQ 与平面 ABC 所成角的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$ 则三校锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为　　　　(　　)

A．50π　　B．55π　　C． 57π　　D．108π

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9．已知 $f(x)$ 是定义域为　的函数，满足 $f(x+1)=f(x-3)$，$f(1+x)=f(3-x)$，当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=x^2-x$，则下列说法正确的是　　　　(　　)

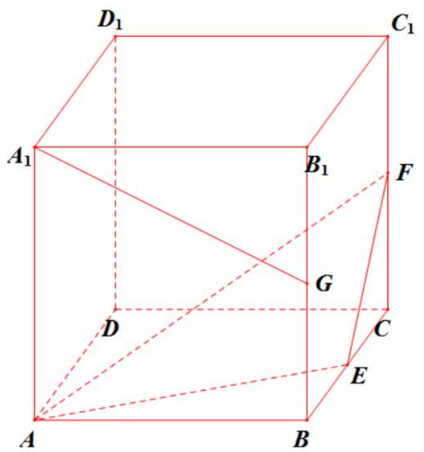
A． $f(x)$ 的最小正周期为 4

B．$f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称

C．当 $0\le x\le 4$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 2

D．当 $6\le x\le 8$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$

10．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1 的中点，则　　　　(　　)



A．直线 DD_1 与直线 AF 垂直　　　　B．直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C．点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等　　　　D．平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{8}$

11．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，则　　　　(　　)

A．实轴为 2　　　　　　　　B．渐近线为　$y=\pm\sqrt{3}x$

C．离心率为 2　　　　　　　D．一条渐近线与准线的交点到另一条渐近线的距离为 3

12．已知 $\ln x_1-x_1-y_1+2=0$，$x_2+2y_2-2\ln 2-6=0$，记 $M=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$，则(　　)

A．M 的最小值为 $\frac{16}{5}$　　　　B．当 M 最小时，　$x_2=\frac{14}{5}$

C．M 的最小值为 $\frac{4}{5}$　　　　D．当 M 最小时 $x_2=\frac{12}{5}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知向量 $\vec{a}=(1,m)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$__________.

14．$\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中 x 的系数为__________.

15．某系列智能手机玻璃版有"星河银"、"罗兰紫"、"翡冷翠"、"亮黑色"四种颜色.若甲、乙等四位市民准备分别购买一部颜色互不相同的同一型号玻璃版的该系列手机.若甲购买"亮黑色"或"星河银"，则乙不购买"罗兰紫"，则这四位市民不同的购买方案有__________种.

16．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le a,\\ x^2, x>a.\end{cases}$①若 $a=1$，则不等式 $f(x)\le 1$ 的解集为__________；②若存在实数 b，使函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．(10 分)在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，且满足 $(b-a)(\sin B+\sin A)=c(\sqrt{3}\sin B-\sin C)$．

(1)求 A 的大小；

(2)若 $a=2$， $B=\dfrac{\pi}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18．(12 分)给出下列三个条件：① $4a_3$， $3a_4$， $2a_5$ 成等差数列；②对于 $\forall n\in\ ^{*}$，点 $\left(n,S_n\right)$ 均在函数 $y=2^x-a$ 的图像上，其中 a 为常数；③ $S_3=7$.请从这三个条件中任选一个将下面的题目补充完整，并求解.

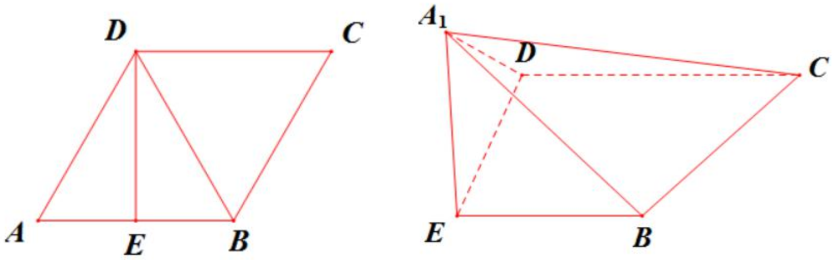
设 $\{a_n\}$ 是一个公比为 $q\left(q>0,q\neq1\right)$ 的等比数列，且它的首项 $a_1=1$，.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $b_n=2\log_2 a_n+1\left(n\in\ ^{*}\right)$，证明 $\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 b 项和 $T_n<\dfrac{1}{2}$.

19．(12 分)如图 1，在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^{\circ}$，$DE\perp AB$ 于点 E，将 $\triangle ADE$

沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $A_1D\perp DC$，如图 2.



(1)求证：$A_1E\perp$ 平面 $BCDE$；

(2)求二面角 $E-A_1B-C$ 的余弦值.

20．(12 分)已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右准线方程为 $x=4$，右顶点为 A，上顶点为 B，右焦点为 F，斜率为 2 的直线经过点 A，且点 F 到直线的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)将直线绕点 A 旋转，它与椭圆 C 相交于另一点 P，当 B，F，P 三点共线时，试确定直线的斜率.

21．(12 分)南京市从 2020 年 6 月 1 日起推进垃圾分类处理，是落实绿色发展理念的必然选择，也是打赢污染防治攻坚战的重要环节，为了解居民对垃圾分类的了解程度，某社区居委会随机抽取 1000 名社区居民参与问卷测试，并将问卷得分绘制频率分布表如下：

得分	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
男性人数	40	90	120	130	110	60	30
女性人数	20	50	80	110	100	40	20

(1)从该社区随机抽取一名居民参与问卷测试，试估计其得分不低于 60 分的概率；

(2)将居民对垃圾分类的了解程度分为"比较了解"（得分不低于 60 分）和"不太了解"（得分低于 60 分）两类，完成 2×2 列联表，并判断是否有 95%的把握认为"居民对垃圾分类的了解程度"与"性别"有关？

	不太了解	比较了解	总计
男性			
女性			
总计			

(3)从参与问卷测试且得分不低于 80 分的居民中，按照性别进行分层抽样，共抽取 10 人，连同 $m(m\in {}^{*})$ 名男性调查员一起组成 3 个环保宣传组，若从这 $m+10$ 人中随机抽取 3 人作为组长，且男性组长人数 ξ 的期望不小于 2，求 m 的最小值.

附公式及表 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22．(12 分)已知函数 $f(x)=x^2-2x\ln x$， $g(x)=x+\dfrac{a}{x}-\left(\ln x\right)^2$，其中 $a\in$ ， x_0 是 $g(x)$ 的一个极值点，且 $g(x_0)=2$．

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；(2)求实数 x_0 和 a 的值；

(3)证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\dfrac{1}{2}\ln\left(2n+1\right)\left(n\in{}^{*}\right)$

高三数学试题答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1－8：C D A D C C B C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每个小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分．

9．ABC　　10．BD　　11．BC　　12．AB

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．16 题第一个空 2 分，第二个空 3 分.

13．$\frac{\sqrt{2}}{2}$；14．－280；15．20；　16．①（－∞，0]　②（－∞，2）∪（4，＋∞）

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：（1）因为$(b-a)(\sin B+\sin A)=c(\sqrt{3}\sin B-\sin C)$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$(b-a)(b+a)=c(\sqrt{3}b-c)$，即

$b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$，　　……2 分

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　……4 分

因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{6}$．　　……5 分

（2）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$b=\frac{a}{\sin A}\sin B=2\sqrt{2}$．　　……6 分

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$(2\sqrt{2})^2=2^2+c^2-2\times 2c\cos\frac{\pi}{4}$，

解得$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$．　　……8 分

所以　ABC 的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}+1$．　　……10 分

18． 解：若选①：因为 $4a_3, 3a_4, 2a_5$ 成等差数列，所以 $2\times 3a_4 = 4a_3 + 2a_5$．

又因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，即 $q^2 - 3q + 2 = 0$ 解得 $q = 2$ 或 $q = -1$（舍去）……3 分

又 $a_1 = 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$a_n = 2^{n-1}$ ……6 分

若选②：点 (n, S_n) 均在函数 $y = 2^x - a$ 的图像上，所以 $S_n = 2^n - a$，又因为 $a_1 = S_1 = 2 - a$，

所以 $a = 1$，所以 $S_n = 2^n - 1$，所以 $S_2 = 3$，所以 $a_2 = 2, q = 2$． ……3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$a_n = 2^{n-1}$ ……6 分

若选③：$S_3 = 7$，因为 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q > 0, q \neq 1)$ 的等比数列，

所以 $\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 7$，即 $q^2 + q - 6 = 0$ 解得 $q = 2$ 或 $q = -3$（舍去） ……3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$a_n = 2^{n-1}$ ……6 分

（2）证明：因为 $a_n = 2^{n-1}$，所以 $b_n = 2\log_2 a_n + 1 = 2n-1$ ……8 分

所以 ……10 分

$$\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right]$$

所以 ……12 分

$$T_n = \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{2}$$

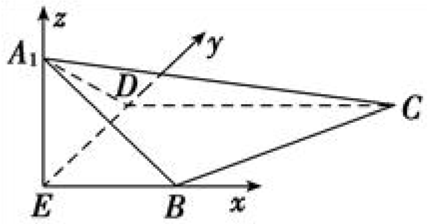
19．解：(1) ∵$DE\perp BE$，$BE\parallel DC$，∴$DE\perp DC$． ……1 分

又∵$A_1D\perp DC$，$A_1D\cap DE=D$，∴$DC\perp$平面 A_1DE，∴$DC\perp A_1E$． ……3 分

又∵$A_1E\perp DE$，$DC\cap DE=D$，∴$A_1E\perp$平面 $BCDE$． ……5 分

(2) ∵$A_1E\perp$平面 $BCDE$，$DE\perp BE$，

∴以 EB，ED，EA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴和 z 轴，建立空间直角坐标系（如图）．



易知 $DE=2\sqrt{3}$，则 $A_1(0，0，2)$，$B(2，0，0)$，$C(4，2\sqrt{3}，0)$，$D(0，2\sqrt{3}，0)$，……7 分

∴ $\overrightarrow{BA_1}=(-2，0，2)$，$\overrightarrow{BC}=(2，2\sqrt{3}，0)$，

易知平面 A_1BE 的一个法向量为 $n=(0，1，0)$． ……8 分

设平面 A_1BC 的法向量为 $m=(x，y，z)$，

由 $\overrightarrow{BA_1}\cdot m=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot m=0$，得$\begin{cases}-2x+2z=0,\\2x+2\sqrt{3}y=0.\end{cases}$令 $y=1$，得 $m=(-\sqrt{3}，1，-\sqrt{3})$， ……10 分

∴$\cos\langle m，n\rangle=\dfrac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\dfrac{1}{\sqrt{7}\times 1}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$．

由图得二面角 $E-A_1B-C$ 为钝二面角，∴二面角 $E-A_1B-C$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$．……12 分

20.解：(1) 由题意知，直线的方程为 $y=2(x-a)$，$2x-y-2a=0$， ………2 分

$\therefore$ 右焦点 F 到直线的距离为$\dfrac{|2c-2a|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $\therefore a-c=1$， ……………4 分

又椭圆 C 的右准线为 $x=4$，即 $\dfrac{a^2}{c}=4$，所以 $c=\dfrac{a^2}{4}$，将此代入上式解得 $a=2,c=1$，

$\therefore b^2=3$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； ……………6 分

（2）由（1）知 $B(0,\sqrt{3})$，$F(1,0)$，$\therefore$ 直线 BF 的方程 $y=-\sqrt{3}(x-1)$，……………7 分

联立方程组 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{3\sqrt{3}}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$（舍），即 $P(\dfrac{8}{5},-\dfrac{3\sqrt{3}}{5})$，……………10 分

$\therefore$ 直线的斜 $k=\dfrac{0-(-\dfrac{3\sqrt{3}}{5})}{2-\dfrac{8}{5}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………12 分

其他方法：

方法二: 由（1）知 $B(0,\sqrt{3})$，$F(1,0)$，$\therefore$ 直线 BF 的方程为 $y=-\sqrt{3}(x-1)$，由题 $A(2,0)$，显然直线的斜率存在，设直线的方程为 $y=k(x-2)$，联立方程组 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-1) \\ y=k(x-2) \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{2k+\sqrt{3}}{k+\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{-\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}} \end{cases}$，代入椭圆解得：$k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又由题意知，$y=\dfrac{-\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}>0$ 得 $k>0$ 或 $k<-\sqrt{3}$，所以 $k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

方法三：由题 $A(2,0)$，显然直线的斜率存在，设直线的方程为 $y=k(x-2)$，联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $\left(4k^2+3\right)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$，$x_A+x_P=\dfrac{16k^2}{4k^2+3}$，

所以 $x_P=\dfrac{16k^2}{4k^2+3}-2=\dfrac{8k^2-6}{4k^2+3}, y_P=\dfrac{-12k}{4k^2+3}$，当 B,F,P 三点共线时有，$k_{BP}=k_{BF}$，

即 $\dfrac{\dfrac{-12k}{4k^2+3}-\sqrt{3}}{\dfrac{8k^2-6}{4k^2+3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$，解得 $k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又由题意知，$y=\dfrac{-\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}>0$ 得 $k>0$ 或 $k<-\sqrt{3}$，所以 $k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

21.解:（1）由调查数据，问卷得分不低于 60 分的比率为

$\frac{130+110+90+110+100+60}{1000}=0.6$，故从该社区随机抽取一名居民得分不低于 60 分的概率为 0.6;　　　　……2 分

（2）由题意得列联表如下:

	不太了解	比较了解	总计
男性	250	330	580
女性	150	270	420
总计	400	600	1000

……3 分

$K^2=\frac{1000\times(250\times270-330\times150)^2}{400\times600\times420\times580}\approx5.542$　　　　……5 分

因为 $5.542>3.841$,

所以有 95%的把握认为居民对垃圾分类的了解程度与性别有关　　　　……6 分

（3）由题意知，分层抽样抽取的 10 人中，男性 6 人，女性 4 人　　　　……7 分

随机变量ξ的所以可能取值为 0，1，2，3，其中

$P(\xi=0)=\frac{C_{m+6}^{0}C_4^3}{C_{m+10}^{3}}$，$P(\xi=1)=\frac{C_{m+6}^{1}C_4^2}{C_{m+10}^{3}}$，$P(\xi=2)=\frac{C_{m+6}^{2}C_4^1}{C_{m+10}^{3}}$，$P(\xi=3)=\frac{C_{m+6}^{3}C_4^0}{C_{m+10}^{3}}$,

……9 分

所以随机变量ξ的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{C_{m+6}^{0}C_4^3}{C_{m+10}^{3}}$	$\frac{C_{m+6}^{1}C_4^2}{C_{m+10}^{3}}$	$\frac{C_{m+6}^{2}C_4^1}{C_{m+10}^{3}}$	$\frac{C_{m+6}^{3}C_4^0}{C_{m+10}^{3}}$

$E（\xi）=\dfrac{C_{m+6}^{0}C_4^3}{C_{m+10}^{3}}\times 0+\dfrac{C_{m+6}^{1}C_4^2}{C_{m+10}^{3}}\times 1+\dfrac{C_{m+6}^{2}C_4^1}{C_{m+10}^{3}}\times 2+\dfrac{C_{m+6}^{3}C_4^0}{C_{m+10}^{3}}\times 3\geqslant 2$ ……10 分

解得 $m\geqslant 2$，所以 m 的最小值为 2 ……12 分

法二：由题意知，随机变量ξ服从超几何分布 $H（3，m+6，m+10）$， ……8 分

则 $E（\xi）=\dfrac{3（m+6）}{m+10}$， ……10 分

由 $E（\xi）\geqslant 2$ 得 $m\geqslant 2$，所以 m 的最小值为 2 ……12 分

22．解：（1）函数 $f(x)$的定义域为（0，$+\infty$），且 $f'(x)=2x-2\ln x-2$，令 $h(x)=f'(x)$，

则有 $h'(x)=\dfrac{2（x-1）}{x}$，由 $h'(x)=0$ 可得 $x=1$，如下表：

x	（0，1）	1	（1，$+\infty$）
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在（0，$+\infty$）上单调递增 ……3 分

（2）函数 $g(x)$的定义域为（0，$+\infty$），且 $g'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}$

由已知，得 $g'(x_0)=0$，即 $x_0^2-2x_0\ln x_0-a=0$ ①

由 $g(x_0)=2$ 可得 $x_0^2-x_0（\ln x_0）^2-2x_0+a=0$ ②

联立①②消去 a 可得 $2x_0-（\ln x_0）^2-2\ln x_0-2=0$ ③

令 $t(x)=2x-（\ln x）^2-2\ln x-2$，则 $t'(x)=2-\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2（x-\ln x-1）}{x}$

由 ①知 $x-\ln x-1\geqslant 0$，故 $t'(x)\geqslant 0$，所以 $t(x)$在（0，$+\infty$）上单调递增

$t(1)=0$，所以方程③有唯一解 $x_0=1$，代入①，可得 $a=1$． ……7 分

（3）由（1）知 $f(x)=x^2-2x\ln x$ 在（0，$+\infty$）上单调递增，

故当 $x\in$（1，$+\infty$），$f(x)>f(1)=1$，所以 $g'(x)=1-\frac{a}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{f(x)-1}{x^2}>0$，

可得 $g(x)$在（1，$+\infty$）上单调递增。当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=2$，即 $x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2>2$

亦即 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>(\ln x)^2$，这时$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$，$\ln x>0$，故得$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>\ln x$

取 $x=\frac{2k+1}{2k-1}$，$k\in\boldsymbol{N}^*$。可得$\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}>\ln(2k+1)-\ln(2k-1)$

而$\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}=\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}$ 故$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}>\sum\limits_{k=1}^{n}[\ln(2k+1)-\ln(2k-1)]=\ln(2n+1)$

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\frac{1}{2}\ln(2n+1)$ ……12 分