江苏省六校联合2021届高三第四次适应性考试

数　学

命题：徐州一中高三数学组、兴化中学高三数学组、淮阴中学高三数学组

审核：盐城中学高三数学组、南京十三中高三数学组、泗阳中学高三数学组　　2021.4

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量集合 $M=\{a|a=(1,2)+\lambda(3,4),\lambda\in R\}$，$N=\{a|a=(-2,-2)+\lambda(4,5),\lambda\in R\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{(1,2)\}$　　B. $\{(-2,-2)\}$　　C. $\{(1,2),(-2,-2)\}$

D. $\varnothing$

2. 十六进制是一种逢16进1的计数制．我国曾在重量单位上使用过十六进制，比如成语"半斤八两"，即十六两为一斤．在现代，计算机中也常用到十六进制，其采用数字 $0\sim9$ 和字母 $A\sim F$ 共16个计数符号．这些符号与十进制的数的对应关系如下表：

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如，用十六进制表示：$E+D=1B$，则 $A\times B=$

A. $6E$　　B. 72　　C. $5F$　　D. BD

3. 正三棱柱 $P-ABC$ 的高为2，侧棱与底面 ABC 成 45° 角，则点 A 到侧面 PBC 的距离为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

4. 用有机溶剂萃取水溶液中的溶质是化学中进行物质分离与提纯的一种重要方法．根据能斯特分配定律，一次萃取后，溶质在有机溶剂和水中的物质的量浓度（单位：mol/L）之比为常数 K，并称 K 为该溶质在水和有机溶剂中的分配常数．现用一定体积的有机溶剂进行 n 次萃取，每次萃取后溶质在水溶液中的残留量为原物质的量的 $\dfrac{10}{10+K}$ 倍，溶质在水溶液中原始的物质的量浓度为1.0mol/L，该溶质在水和有机溶剂中的分配常数为20，则至少经过几次萃取，溶质在水溶液中的物质的量浓度低于 1.0×10^{-5}mol/L？（假设萃取过程中水溶液的体积不变．参考数据：$\ln3\approx1.099$，$\ln10\approx2.303$．）

A. 9次　　B. 10次　　C. 11次　　D. 12次

5. $(1+\sqrt[3]{x})^6(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}})^{10}$ 展开式中的常数项为

A. 1　　B. 46　　C. 4245　　D. 4246

6. 学校组织开展劳动实践，高二某班15名学生利用假期时间前往敬老院、消防队等场所劳动服务．经统计，该15名学生的劳动服务时长平均为20小时，标准差为 s．后来经核实，发现统计的甲、乙两名同学的劳动服务时长有误．甲同学的劳动服务时长实际为20小时，被误统计为15小时；乙同学的劳动服务时长实际为18小时，被误统计为23小时．更正后重新计算，得到标准差为 s_1，则 s 与 s_1 的大小关系为

A. $s=s_1$　　B. $s<s_1$　　C. $s>s_1$　　D. 无法判断

7. 已知向量 $a\neq \mathrm{e}$，$|\mathrm{e}|=1$，且对任意 $t\in R$，$|a-te|\geqslant|a-\mathrm{e}|$ 恒成立，则

A. $a\perp \mathrm{e}$　　B. $a\perp(a-e)$　　C. $\mathrm{e}\perp(a-e)$　　D. $(a+\mathrm{e})\perp(a-e)$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的一点，以抛物线的焦点 F 为圆心，以 FA 为半径的圆交抛物线的准线于 B，C 两点，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{128}{3}$，记 $\angle BFC=\theta$，若 $2\sin^2\theta-\sin2\theta=3\cos\theta-\sin\theta$，则 p 的值为

A. 4　　B. 8　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知 α，β 是两个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，下列说法正确的是

A. "经过两条平行直线，有且仅有一个平面"是空间图形的基本事实（公理）之一

B. "若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m/\!/\beta$"是平面与平面平行的性质定理

C. "若 $m/\!/n$，$m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m/\!/\alpha$"是直线与平面平行的判定定理

D. 若 $\alpha/\!/\beta$，$m/\!/\alpha$，$m/\!/n$，$n\not\subset\beta$，则 $n/\!/\beta$

10. 若 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=xy$，则

A. $x+y\geqslant4$　　B. $xy\geqslant2$

C. $x+2y+xy\geqslant5+2\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{4y}{y-1}\geqslant6+4\sqrt{2}$

11. 已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 e_1，上顶点为 P，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 b^2．双曲线 C_2 与椭圆 C_1 的焦点相同，且 C_2 的离心率为 e_2，M 为 C_1 与 C_2 的一个公共点，若 $\angle F_1MF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则

A. $\dfrac{\mathrm{e}_2}{\mathrm{e}_1}=\sqrt{3}$　　B. $\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2=\dfrac{3}{4}$　　C. $\mathrm{e}_1^2+\mathrm{e}_2^2=2$　　D. $\mathrm{e}_2^2-\mathrm{e}_1^2=\dfrac{5}{8}$

12. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^3+ax\ln2}{\mathrm{e}^{2x}}+b\ln x$，下列说法正确的是

A. 若 $a=b=0$，$f(x)$ 是奇函数

B. 若 $a=1$，$b=0$，$f(x)$ 在 $(\dfrac{3}{2},+\infty)$ 单调递减

C. 若 $a=0$，$b=-1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有且仅有一个零点

D. 若 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1+x_2}>\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x_1>x_2>1)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 国际象棋中骑士 ($Knight$) 的移动规则是沿着 3×2 格或 2×3 格的对角移动．若骑士限制在图中的 $3\times4=12$ 格内按规则移动，存在唯一一种给方格标数字的方式，使得骑士从左上角标 1 的方格内出发，依次不重复经过 2，3，4，…，到达右下角标 12 的方格内，那么图中 X 处所标的数应为＿＿＿＿＿＿．

1			
X			
3			12

14. 写出一个使得 $\omega+\omega^2+\omega^3=0$ 成立的非零复数 $\omega=$＿＿＿＿＿＿．

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 为正项数列，$a_1=1$，S_n 为 $\sqrt{a_n}$ 的前 n 项和，且满足 $1+S_n^2=a_{n+1}+S_n$，则分别以 1，S_n，$\sqrt{a_{n+1}}$ 为三边边长的三角形有一内角为定值＿＿＿＿＿＿，$\{a_n\}$ 的通项公式为＿＿＿＿＿＿．（本题第一空 2 分，第二空 3 分．）

16. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=13$，$AD=5$，$AA_1=12$，过点 A 且与直线 CD 平行的平面 α 将长方体分成两部分．现同时将两个球分别放入这两部分几何体内，则在平面 α 变化的过程中，这两个球的半径之和的最大值为＿＿＿＿＿＿．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s|0\leqslant s<t,\text{且 } s,t\in Z\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，即 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=6$，$a_4=9$，$a_5=10$，$a_6=12$，….将 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大、左小右大的原则写成如下的三角形数表．

3

5 6

9 10 12

… … … …

… … … … …

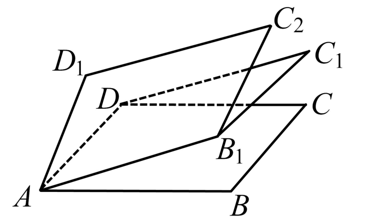
…………

(1) 写出该三角形数表的第四行、第五行各数（不必说明理由），并求 a_{100}；

(2) 设 $\{b_n\}$ 是该三角形数表第 n 行的 n 个数之和所构成的数列，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

18. (12 分)

如图，在水平桌面上放置一块边长为 1 的正方形薄木板 $ABCD$．先以木板的 AD 边为轴，将木板向上缓慢转动，得到平面 AB_1C_1D，此时 $\angle B_1AB$ 的大小为 θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$．再以木板的 AB_1 边为轴，将木板向上缓慢转动，得到平面 $AB_1C_2D_1$，此时 $\angle C_2B_1C_1$ 的大小也为 θ．



(1) 求整个转动过程木板扫过的体积；

(2) 求平面 $AB_1C_2D_1$ 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值．

19. (12 分)

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$(3-\cos A)\tan\dfrac{B}{2}=\sin A$，$\triangle ABC$的周长为8.

(1) 求b；

(2) 求$\triangle ABC$面积的最大值.

20. (12 分)

郑州中原福塔的外立面呈双曲抛物面状，造型优美，空中俯瞰犹如盛开的梅花绽放在中原大地，是现代建筑与艺术的完美结合. 双曲抛物面又称马鞍面，其在笛卡儿坐标系中的方程与在平面直角坐标系中的双曲线方程类似. 双曲线在物理学中具有很多应用，比如波的干涉图样为双曲线、反射式天文望远镜利用了其光学性质等等.

(1) 已知A，B是在直线l两侧且到直线l距离不相等的两点，P为直线l上一点. 试探究当点P的位置满足什么条件时，$|PA-PB|$取最大值；

(2) 若光线在平滑曲线上发生反射时，入射光线与反射光线关于曲线在入射点处的切线在该点处的垂线对称. 证明：由双曲线一个焦点射出的光线，在双曲线上发生反射后，反射光线的反向延长线交于双曲线的另一个焦点.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\ln^2(x+1)-\dfrac{x^2}{x+1}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $(1+\dfrac{1}{n})^{n+a}\leqslant \mathrm{e}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立,求 a 的取值范围.

22. (12 分)

品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试,通常采用的测试方法如下:拿出 $n(n\in N^*$ 且 $n\geqslant 4)$ 瓶外观相同但品质不同的酒让品酒师品尝,要求其按品质优劣为它们排序;经过一段时间,等其记忆淡忘之后,再让其品尝这 n 瓶酒,并重新按品质优劣为它们排序. 这称为一轮测试,根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分. 现分别以 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 表示第一次排序时被排在 $1, 2, 3, \ldots, n$ 的 n 种酒在第二次排序时的序号,并令 $X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+\cdots+|n-a_n|$,则 X 是对两次排序的偏离程度的一种描述.

(1) 证明:无论 n 取何值,X 的可能取值都为非负偶数;

(2) 取 $n=4$,假设在品酒师仅凭随机猜测来排序的条件下,a_1, a_2, a_3, a_4 等可能地为 $1, 2, 3, 4$ 的各种排列,且各轮测试相互独立.

①求 X 的分布列和数学期望;

②若某品酒师在相继进行的三轮测试中,都有 $X\leqslant 2$,则认为该品酒师有较好的酒味鉴别功能. 求出现这种现象的概率,并据此解释该测试方法的合理性.

江苏省六校联合2021届高三第四次适应性考试

数学试题评分参考

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B　2．A　3．D　4．C　5．D　6．C　7．C　8．B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．CD　10．ACD　11．AC　12．BC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．8　14．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$（或$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$）

15．$\frac{\pi}{3}$（2分）$a_n=\dfrac{3}{4\sin^2[\frac{\pi}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-2}]}$（3分）　16．$17-2\sqrt{30}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10分）

(1) 第四行：17 18 20 24，（1分）

第五行：33 34 36 40 48，（2分）

在该三角形数表中第t行中有t个数，其中第$s+1$个数为2^t+2^s，（4分）

设$a_{100}=2^{t_0}+2^{s_0}$，则$\begin{cases}\dfrac{(1+t_0-1)(t_0-1)}{2}<100\leqslant\dfrac{(1+t_0)t_0}{2}\\100-\dfrac{(1+t_0-1)(t_0-1)}{2}=s_0+1\end{cases}$，解得$\begin{cases}t_0=14\\s_0=8\end{cases}$，

从而$a_{100}=2^{14}+2^8=16640$.（6分）

(2) $b_n=n\cdot2^n+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=n\cdot2^n+\dfrac{1(1-2^n)}{1-2}=(n+1)2^n-1$，（8分）

故$S_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n-n$，

$2S_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\cdot2^{n+1}-2n$，

从而$S_n=(n+1)\cdot2^{n+1}-4-\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-n=n\cdot2^{n+1}-n$.（10分）

考生若有其它解法，应给予充分尊重，并参照本标准评分.

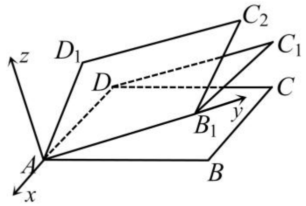
18．（12分）

(1) 整个转动过程木板扫过的几何体由两个底面为圆心角为θ，半径为1的扇形，高为1的直棱柱组成，（2分）

故其体积$V=2\times(\dfrac{\theta}{2\pi}\times\pi\times1^2\times1)=\theta$.（4分）

(2) 以A为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$方向为x轴正方向，$\overrightarrow{AB_1}$方向为y轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，

则$A(0,0,0)$，$B(0,\cos\theta,-\sin\theta)$，$D(-1,0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$D_1(-\cos\theta,0,\sin\theta)$，



$\overrightarrow{AB}=(0,\cos\theta,-\sin\theta)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,0)$，

$\overrightarrow{AD_1}=(-\cos\theta,0,\sin\theta)$，（6分）

设$n=(x,y,z)$是平面$ABCD$的一个法向量，则

$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=0\\n\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}y\cos\theta-z\sin\theta=0\\-x=0\end{cases}$，不妨令$y=\sin\theta$，

可取$n=(0,\sin\theta,\cos\theta)$，（8分）

同理平面$AB_1C_2D_1$的一个法向量$m=(\sin\theta,0,\cos\theta)$，（10分）

设平面$AB_1C_2D_1$与平面$ABCD$所成锐二面角为ϕ，

则$\cos\phi=|\cos<n,m>|=\left|\dfrac{\cos^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\cdot\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}\right|=\cos^2\theta$，

所以平面$AB_1C_2D_1$与平面$ABCD$所成锐二面角的余弦值为$\cos^2\theta$.（12分）

考生若有其它解法，应给予充分尊重，并参照本标准评分.

19．（12分）

(1) 因为$(3-\cos A)\tan\dfrac{B}{2}=\sin A$，所以$(3-\cos A)2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sin A\cdot2\cos^2\dfrac{B}{2}$，

所以$\sin B(3-\cos A)=\sin A(1+\cos B)$，（2分）

化简得$3\sin B=\sin A+\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sin A+\sin(A+B)$，

又因为$A+B+C=\pi$，故$3\sin B=\sin A+\sin[\pi-(A+B)]=\sin A+\sin C$，（4分）

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，故$3b=a+c$，

从而$a+b+c=4b=8$，即$b=2$.（6分）

(2) 由于$6=a+c\geqslant2\sqrt{ac}$，所以$ac\leqslant9$，当且仅当$a=c=3$时等号成立，（7分）

而$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，（9分）

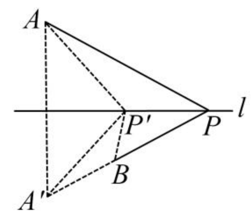
故$S^2_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{4}a^2c^2\sin^2B=\dfrac{1}{4}a^2c^2(1-\cos^2B)=\dfrac{1}{4}a^2c^2[1-(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2]$

$=\dfrac{1}{4}a^2c^2[1-(\dfrac{(a+c)^2-2ac-b^2}{2ac})^2]=8ac-64\leqslant8$，

所以$S_{\triangle ABC}\leqslant2\sqrt{2}$，故$\triangle ABC$面积的最大值为$2\sqrt{2}$.（12分）

考生若有其它解法，应给予充分尊重，并参照本标准评分.

20．（12分）



(1) 不妨设A点到直线l的距离比B点到直线l的距离大，作A点关于直线l的对称点A'.

当l为$\angle APB$的平分线时，A'，B，P三点共线，

故$PA-PB=PA'-PB=A'B$，

当l不是$\angle APB$的平分线时，取这样的点P'，则A'，B，P'能构成一个三角形，

故 $P'A-P'B=P'A'-P'B<A'B$，

因此，当且仅当 P 的位置使得 l 为 $\angle APB$ 的平分线时，$|PA-PB|$ 取最大值．（4 分）

(2) 不妨设双曲线的焦点在 x 轴上，半实轴长为 a，左右焦点分别为 F_1，F_2，入射光线 l_1 从 F_2 出射，入射点 Q，反射光线 l_2，双曲线在 Q 点处的切线 l_3，l_3 在 Q 点处的垂线 l_4，

由光的反射定律，l_1，l_2 关于 l_4 对称，故 l_1，l_2 关于 l_3 对称，

要证：反射光线 l_2 过点 F_1，

只要证：l_3 是 $\angle F_1QF_2$ 的角平分线，（7 分）

定义双曲线焦点所在区域为双曲线的内部，渐近线所在区域为双曲线的外部，

由双曲线的定义，$F_1Q-F_2Q=2a$，

对于双曲线内部的一点 Q' 有 $|F_1Q'-F_2Q'|>2a$，

对于双曲线外部的一点 Q'' 有 $|F_1Q''-F_2Q''|<2a$，（9 分）

（命题：淮阴中学－朱振东 兴化中学－姚楷 徐州一中－赵嘉钰）

又 l_3 是双曲线在 Q 点处的切线，故在 l_3 上有且仅有一点 Q 使得 $F_1Q-F_2Q=2a$，

l_3 上其他点 Q''' 均有 $F_1Q'''-F_2Q'''<2a$，

故 Q 是 l_3 上唯一使得 F_1Q-F_2Q 取最大值的点，（11 分）

又 F_1，F_2 到直线 l_3 距离不相等，根据 (1) 中结论，可知 l_3 是 $\angle F_1QF_2$ 的角平分线，

故反射光线 l_2 过点 F_1，命题得证．（12 分）

考生若有其它解法，应给予充分尊重，并参照本标准评分．

21．（12 分）

(1) $f(x)$ 的定义域 $(-1,\ +\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}-\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2(x+1)\ln(x+1)-x^2-2x}{(x+1)^2}$，（1 分）

令 $g(x)=2(x+1)\ln(x+1)-x^2-2x$，$x\in(-1,\ +\infty)$，$g'(x)=2\ln(x+1)-2x$，（2 分）

令 $h(x)=2\ln(x+1)-2x$，$x\in(-1,\ +\infty)$，

$h'(x)=\dfrac{2}{x+1}-2$，当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$h'(x)<0$，（3 分）

所以 $h(x)$ 在 $(-1,\ 0)$ 单调递增，在 $(0,\ +\infty)$ 单调递减，

又 $h(0)=0$，故 $h(x)\leqslant 0$，即当 $x>-1$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\ +\infty)$ 单调递减，（4 分）

于是当 $-1<x<0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，当 $x>0$ 时，$g(x)<g(0)=0$，

所以当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,\ 0)$，单调递减区间为 $(0,\ +\infty)$．（6 分）

(2) 不等式 $(1+\dfrac{1}{n})^{n+a}\leqslant e(n\in N^*)$ 等价于 $(n+a)\ln(1+\dfrac{1}{n})\leqslant 1$，

又 $1+\dfrac{1}{n}>1$，故 $a\leqslant\dfrac{1}{\ln(1+\dfrac{1}{n})}-n$，（8 分）

设 $\phi(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,\ 1]$，$\phi'(x)=\dfrac{(x+1)\ln^2(x+1)-x^2}{x^2(x+1)\ln^2(x+1)}=\dfrac{f(x)}{x^2\ln^2(x+1)}$，

又 $f(x)\leqslant f(0)=0$，故当 $x\in(0,\ 1]$ 时，$\phi'(x)<0$，（10 分）

所以 $\phi(x)$ 在 $(0,\ 1]$ 单调递减，于是 $\phi(x)\geqslant\phi(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$，故 $a\leqslant\dfrac{1}{\ln 2}-1$，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,\ \dfrac{1}{\ln 2}-1]$．（12 分）

考生若有其它解法，应给予充分尊重，并参照本标准评分．

22．（12 分）

(1) 首先有 $X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+\cdots+|n-a_n|\geqslant 0$，（1 分）

取绝对值不影响数的奇偶性，故 $X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+\cdots+|n-a_n|$

与 $1-a_1+2-a_2+3-a_3+\cdots+n-a_n$ 的奇偶性一致，而

$1-a_1+2-a_2+3-a_3+\cdots+n-a_n=(1+2+3+\cdots+n)-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=0$ 为偶数，

故 X 的可能取值都为非负偶数．（3 分）

(2) ①由 (1) 知当 $n=4$ 时，X 的可能取值为 0，2，4，6，8，

$P(X=0)=\dfrac{1}{A_4^4}=\dfrac{1}{24}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^1}{A_4^4}=\dfrac{1}{8}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^1+C_2^1+1}{A_4^4}=\dfrac{7}{24}$，

$P(X=6)=\dfrac{C_2^1\times C_2^1+C_2^1+C_2^1+1}{A_4^4}=\dfrac{3}{8}$，$P(X=8)=\dfrac{C_2^1+1+1}{A_4^4}=\dfrac{1}{6}$，

所以 X 的分布列为

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$

（8 分）

从而 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{8}+4\times\dfrac{7}{24}+6\times\dfrac{3}{8}+8\times\dfrac{1}{6}=5$．（9 分）

②记“在相继进行的三轮测试中都有 $X\leqslant 2$”为事件 A，“在某轮测试中有 $X\leqslant 2$”为事件 B，则 $P(B)=P(X=0)+P(X=2)=\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{6}$，（10 分）

又各轮测试相互独立，

$P(A)=P(BBB)=P(B)P(B)P(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{216}$，（11 分）

因为 $P(A)$ 表示仅凭随机猜测得到较低偏离程度的结果的概率，

而 $P(A)=\dfrac{1}{216}\approx 0.0046$，该可能性非常小，所以我们可以认为该品酒师确实有较好的酒味鉴别能力，而不是靠随机猜测，故这种测试方法合理．（12 分）

考生若有其它解法，应给予充分尊重，并参照本标准评分．