

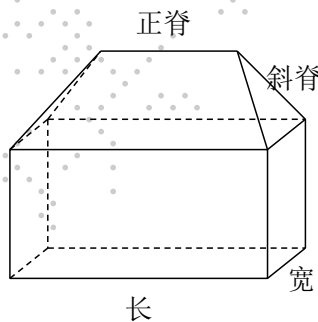
江苏七市 2021 届高三第二次调研考试数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 M, N, P 均为 R 的非空真子集,且 $M \cup N = R, M \cap N = P$, 则 $M \cap (C_R P) =$ ()
 A. M B. N C. $C_R M$ D. $C_R N$
2. 已知 $x \in R$, 则 “ $-3 \leq x \leq 4$ ” 是 “ $\lg(x^2 - x - 2) \leq 1$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
3. 欧拉恒等式: $e^{i\pi} + 1 = 0$ 被数学家们惊叹为 “上帝创造的等式”。该等式将数学中几个重要的数:自然对数的底数 e 、圆周率 π 、虚数单位 i 、自然数 1 和 0 完美地结合在一起,它是在欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta (\theta \in R)$ 中,令 $\theta = \pi$ 得到的。根据欧拉公式, e^{2i} 在复平面内对应的点在 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
4. “帷幄”是古代打仗必备的帐篷,又称“幄帐”。右图是的一种幄帐示意图,帐顶采用“五脊四坡式”,四条斜脊的长度相等,一条正脊平行于底面。若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$, 底面矩形的长与宽之比为 5:3, 则正脊与斜脊长度的比值为 ()



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{9}{10}$ D. 1
5. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为单位向量,且 $\vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{c}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{c} =$ ()
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
6. 函数 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x$ 的图象的一条对称轴为 ()
 A. $x = \frac{\pi}{12}$ B. $x = \frac{\pi}{6}$ C. $x = \frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{2}$

7. 某班 45 名学生参加“3·12”植树节活动,每位学生都参加除草、植树两项劳动. 依据劳动表现,评定为“优秀”、“合格”2个等级,结果如下表:

	优秀	合格	合计
除草	30	15	45
植树	20	25	45

若在两个项目中都“合格”的学生最多有 10 人,则在两个项目中都“优秀”的人数最多为 ()

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

8. 若 $a \ln a > b \ln b > c \ln c = 1$, 则 ()

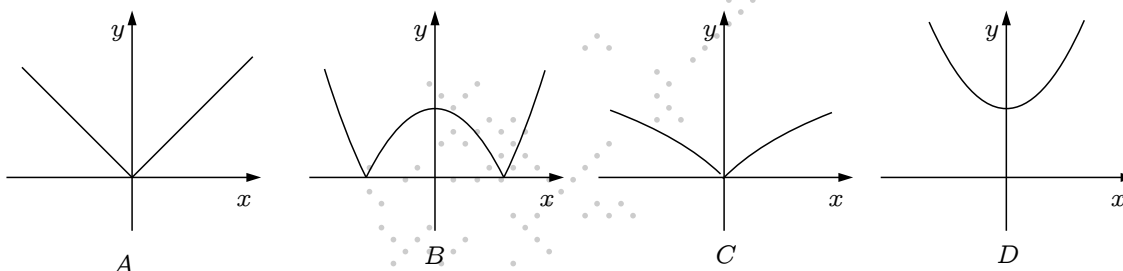
- A. $e^{b+c} \ln a > e^{c+a} \ln b > e^{a+b} \ln c$ B. $e^{c+a} \ln b > e^{b+c} \ln a > e^{a+b} \ln c$
C. $e^{a+b} \ln c > e^{c+a} \ln b > e^{b+c} \ln a$ D. $e^{a+b} \ln c > e^{b+c} \ln a > e^{c+a} \ln b$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,下列结论正确的为 ()

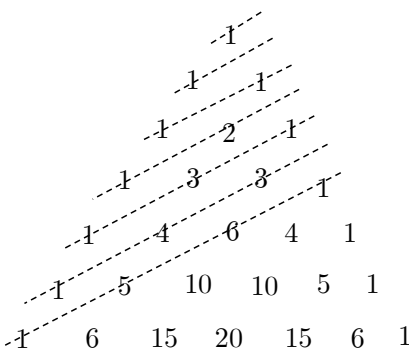
- A. 若 $a_1 a_2 > 0$, 则 $a_2 a_3 > 0$ B. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$
C. 若 $a_2 > a_1 > 0$, 则 $a_1 + a_3 > 2a_2$ D. 若 $a_1 a_2 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) < 0$

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{|x^2 - a|}$ ($a \in \mathbb{R}$), 则 $y = f(x)$ 的大致图象可能为 ()

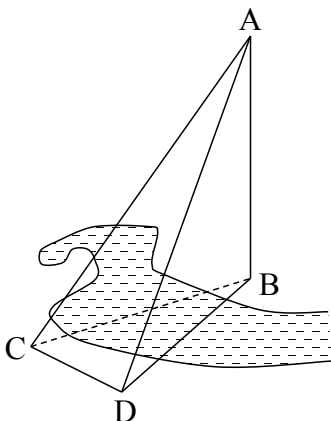


11. “杨辉三角”是中国古代数学杰出的研究成果之一. 如图所示,由杨辉三角的左腰上的各数出发,引一组平行线,从上往下每条线上各数之和依次为: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., 则 ()

- A. 在第 9 条斜线上,各数之和为 55
B. 在第 n ($n \geq 5$) 条斜线上,各数自左往右先增大后减小
C. 在第 n 条斜线上,共有 $\frac{2n+1-(-1)^n}{4}$ 个数
D. 在第 11 条斜线上,最大的数是 C_7^3



12. 如图,某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB (A 为塔顶, B 为塔底) 的高度,选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D (B, C, D 不在同一直线上),测得 $CD = s$. 测绘兴趣小组利用测角仪可测得的角有: $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADB, \angle ADC, \angle BDC$, 则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是 ()



- A. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$
C. $s, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$

- B. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
D. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, $P(X > 0) = 0.9$, 则 $P(2 < X \leq 4) =$ _____.
14. 能使“函数 $f(x) = x|x-1|$ 在区间 I 上不是单调函数,且在区间 I 上的函数值的集合为 $[0, 2]$.”是真命题的一个区间 I 为 _____.
15. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 P , 右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合, C_2 的顶点与 C_1 的中心 O 重合. 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, B , 且四边形 $OAPB$ 为菱形, 则 C_1 的离心率为 _____.
16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AC = 8$, 点 P 到底面 ABC 的距离为 7. 若点 P, A, B, C 均在一个半径为 5 的球面上, 则 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的最小值为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , $b = \sqrt{5}c$, $c \sin A = 1$. 点 D 是 AC 的中点, $BD \perp AB$, 求 c 和 $\angle ABC$.

18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{n+1} = 4a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_1 = 4$.

(1) 证明: $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在① $b_n = a_{n+1} - a_n$: ② $b_n = \log_2 \frac{a_n}{n}$: ③ $b_n = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n}$ 这三个条件中任选一个补充在下面横线上, 并加以解答。

已知数列 $\{b_n\}$ 满足_____, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

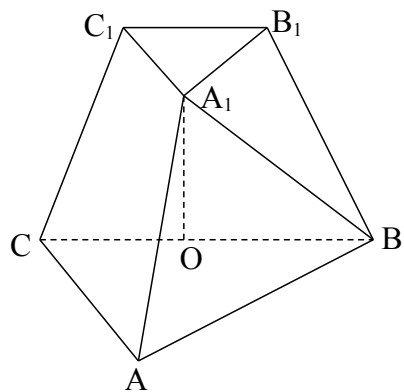
注: 如果选择多个方案分别解答, 按第一个方案解签计分。

19. (12分)

如图, 在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp A_1B$, O 是 BC 的中点, $A_1O \perp$ 平面 ABC .

(1) 求证: $AC \perp BC$:

(2) 若 $A_1O = 1$, $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = A_1B_1 = 2$, 求二面角 $B_1 - BC - A$ 的大小



20. (12 分)

甲、乙两队进行排球比赛,每场比赛采用“5 局 3 胜制”(即有一支球队先胜 3 局即获胜,比赛结束). 比赛排名采用积分制,积分规则如下:比赛中,以 3:0 或 3:1 取胜的球队积 3 分,负队积 0 分;以 3:2 取胜的球队积 2 分,负队积 1 分. 已知甲、乙两队比赛,甲每局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$.

(1) 甲、乙两队比赛 1 场后,求甲队的积分 X 的概率分布列和数学期望;

(2) 甲、乙两队比赛 2 场后,求两队积分相等的概率

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(3, 1)$ 在 C 上, 且 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 10$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 斜率为 -3 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 B 关于原点的对称点为 D . 若直线 PA, PD 的斜率存在且分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 \cdot k_2$ 为定值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax}(\ln x + 1)$ ($a \in R$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 设函数 $g(x) = \frac{f'(x)}{e^{ax}}$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),

① 求实数 a 的取值范围;

② 证明: 当 $a < 2e^{\frac{3}{2}}$ 时, $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$.