南京二十九中2022届高三摸底调研测试

数 学 试 题

注意事项：

1．本卷共6页，包括22小题，满分150分，考试时间120分钟。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的指定位置上并准确粘贴条形码。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分；每题只有一个选项符合题意）

1. 集合$M=\left\{x\middle|\frac{x-3}{x-1}\geqslant 0\right\},N=\left\{x\middle|y=\sqrt{2-x}\right\}$，则$(C_RM)\cap N$=

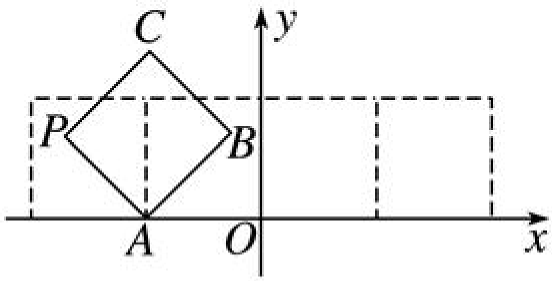
   A. $(1,2]$　　B. $[1,2]$　　C. $(2,3]$　　D. $[2,3]$

2. $\tan\alpha=\frac{1}{3}$是$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$的

   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

   C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 如图，放置的边长为1的正方形$PABC$沿x轴滚动，点B恰好经过原点，设顶点$P(x,y)$的轨迹方程是$y=f(x)$，则对函数$y=f(x)$有下列命题：①若$-2\leqslant x\leqslant 2$，则函数$y=f(x)$是偶函数；②对任意的$x\in R$，都有$f(x+2)=f(x-2)$；③函数$y=f(x)$在区间$[2,3]$上单调递减；④函数$y=f(x)$在区间$[4,6]$上是减函数．其中真命题的序号是

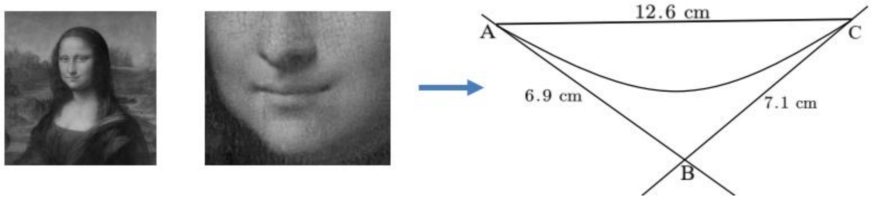


   A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①③④

4. 声强级L_I(单位：dB)与声强I的函数关系式为：$L_I=10\lg(\frac{I}{10^{-12}})$.若普通列车的声强级是$95dB$，高速列车的声强级为$45dB$，则普通列车的声强是高速列车声强的

   A. 10^6倍　　B. 10^5倍　　C. 10^4倍　　D. 10^3倍

5. 某艺术爱好者对《蒙娜丽莎》的同比例影像作品进行了测绘。将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧，在嘴角A，C处作圆弧的切线，两条切线交于B点，测得如下数据：$AB=6.9\,cm$，$BC=7.1\,cm$，$AC=12.6\,cm$.根据测量得到的结果推算女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角位于



A. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$　　C. $(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12})$　　D. $(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2})$

6. 圭表(如图1)是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器，它包括一根直立的标竿(称为“表”)和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺(称为“圭”). 当正午太阳照射在表上时，日影便会投影在圭面上，圭面上日影长度最长的那一天定为冬至，日影长度最短的那一天定为夏至．图 2 是一个根据南京市的地理位置设计的圭表的示意图，已知南京市冬至正午太阳高度角(即$\angle ABC$)约为44.5°，夏至正午太阳高度角(即$\angle ADC$)约为88.5°，圭面上冬至线与夏至线之间的距离(即 DB 的长)为 a，则表高(即 AC 的长)为

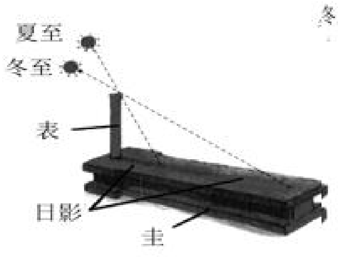


图1

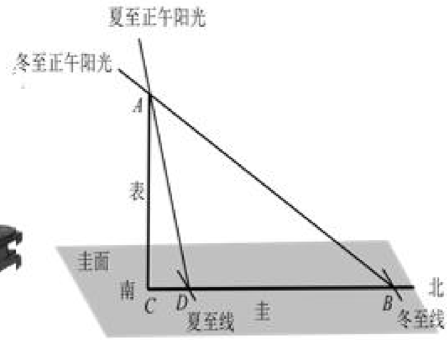


图2

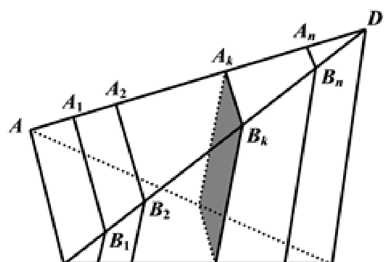
A. $\dfrac{a\sin 44.5^\circ \sin 88.5^\circ}{\sin 44^\circ}$　　B. $\dfrac{a\tan 44.5^\circ \tan 88.5^\circ}{\tan 44^\circ}$

C. $\dfrac{a\tan 88.5^\circ}{\tan 44^\circ}$　　D. $\dfrac{a\sin 88.5^\circ}{\sin 44^\circ}$

7. 已知$|\vec{a}|=\sqrt{6}$，$\vec{b}=(m,3)$，且$(\vec{b}-\vec{a})\perp(2\vec{a}+\vec{b})$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$方向上的投影的最大值为

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. 已知四面体ABCD，分别在棱AD， BD， BC上取$n+1(n\in N^*,n\geqslant 3)$等分点，形成点列$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，$\{C_n\}$，过$A_k$，$B_k$，$C_k(k=1,2,\cdots,n)$作四面体的截面，记该截面的面积为$M_k$，则



A. 数列$\{M_k\}$为等差数列　　B. 数列$\{M_k\}$为等比数列

C. 数列$\{\frac{M_k}{k}\}$为等差数列　　D. 数列$\{\frac{M_k}{k}\}$为等比数列

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分；每题全选且正确得 5 分，部分选择且正确的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$，若 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2(x_1\neq x_2)$ 处切线平行，则

A. $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}=\dfrac{1}{2}$ B. $x_1x_2<128$ C. $x_1+x_2<32$ D. $x_1^2+x_2^2>512$

10. F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，*A* 为左顶点，*P* 为双曲线右支上一点，若 $|PF_1|=2|PF_2|$ 且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30°，则

A. 双曲线的离心率 $\sqrt{3}$

B. 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$

C. $\angle PAF_2=45^{\circ}$

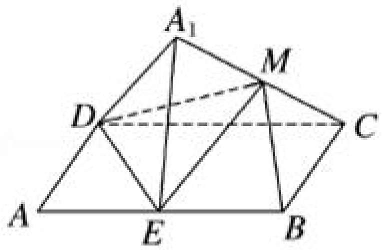
D. 直线 $x+2y-2=0$ 与双曲线有两个公共点

11. 甲罐中有 3 个红球、2 个白球，乙罐中有 4 个红球、1 个白球，先从甲罐中随机取出 1 个球放入乙罐，分别以 A_1，A_2 表示由甲罐中取出的球是红球、白球的事件，再从乙罐中随机取出 1 个球，以 *B* 表示从乙罐中取出的球是红球的事件，下列判断正确的是

A. $P(B)=\dfrac{23}{30}$ B. 事件 *B* 与事件 A_1 相互独立

C. 事件 *B* 与事件 A_2 相互独立 D. A_1，A_2 互斥

12. 如图，在矩形 *ABCD* 中，$AB=2AD=2$，*E* 为 *AB* 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 *DE* 翻折到 $\triangle A_1DE$ 的位置，$A_1\notin$ 平面 *ABCD*，*M* 为 A_1C 的中点，则在翻折过程中，下列结论正确的是



A. $BM//$ 平面 A_1DE

B. *B* 与 *M* 两点间距离为定值

C. 三棱锥 A_1-DEM 的体积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

D. 存在某个位置，使得平面 $A_1DE\perp$ 平面 A_1CD

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知复数 *z* 满足 $|z|=1$，且 $z\cdot(1+i)>0$(其中 *i* 是虚数单位)，则复数 $z=$______▲______.

14. 剪纸社团某学生剪出了三个互相外切的圆，其半径分别为 $\sqrt{3}+1$，$3-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}-1$(单位：cm)，则三个圆之间空隙部分的面积为______▲______cm^2.

15. 过抛物线 *C*：$x^2=4y$ 的准线上任意一点 *P* 作抛物线 *C* 的切线 *PA*，*PB*，切点分别为 *A*，*B*，则点 *A* 到准线的距离与点 *B* 到准线的距离之和的最小值是______▲______.

16. 已知向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 满足 $|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=1$，若存在不同的实数 λ_1，$\lambda_2(\lambda_1\lambda_2\neq 0)$，使得 $\overrightarrow{c}_i=\lambda_i\overrightarrow{a}+3\lambda_i\overrightarrow{b}$，且 $(\overrightarrow{c}_i-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{c}_i-\overrightarrow{b})=0(i=1,2)$，则 $|\overrightarrow{c}_1-\overrightarrow{c}_2|$ 的取值范围是______▲______.

四、解答题（本大题共 6 小题，第 17 题满分 10 分，其余每题满分 12 分，共 70 分）

17. 在 $\triangle ABC$ 中，设 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $b=2a-2c\cos B$，且三角形外接圆半径为 $\sqrt{3}$.

（1）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 $\cos 2A+\cos 2B$ 的值；

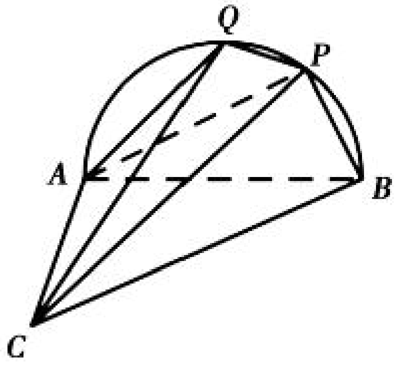
（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O，且满足 $\dfrac{\cos B}{\sin A}\overrightarrow{CB}+\dfrac{\cos A}{\sin B}\overrightarrow{CA}=2m\overrightarrow{CO}$，求 m 的值.

18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，$b_5=4(b_4-b_3)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)对任意的正整数 n，设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

19. 如图，等腰直角三角形 ABC 所在的平面与半圆弧 AB 所在的平面垂直，$AC \perp AB$，P 是弧 AB 上一点，且 $\angle PAB = 30^{\circ}$．



(1) 证明：平面 $BCP \perp$ 平面 ACP；

(2) 若 Q 是弧 AP 上异于 A,P 的一个动点，且 $AB = 4$，当三棱锥 $C - APQ$ 体积最大时，求点 A 到平面 PCQ 的距离．

20. 某在外务工人员甲不知自己已感染新冠病毒（处于潜伏期），他从疫区回乡过春节，这期间他和乙、丙、丁三位朋友相聚。最终，乙、丙、丁也感染了新冠病毒．此时，乙被肯定是受甲感染，丙是受甲或乙感染的。假设他受甲和受乙感染的概率分别是 0.6 和 0.4. 丁是受甲、乙或丙感染的，假设他受甲、乙和丙感染的概率分别是 0.2 、 0.4 和 0.4. 在这种假设之下，乙、丙、丁中直接受甲感染的人数为 X.

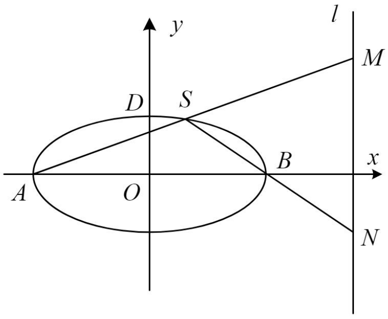
(1) 求 X 的分布列和数学期望；

(2) 该市在发现新冠病毒感染者后要求各区必须每天及时上报新增疑似病例人数．A 区上报的连续 7 天新增疑似病例数据是“总体均值为 3，中位数 4”，B 区上报的连续 7 天新增疑似病例数据是“总体均值为 2，总体方差为 $\dfrac{22}{7}$”. 设 A 区和 B 区连续 7 天上报新增疑似病例人数分别为 x_1，x_2，$\ldots$， x_7 和 y_1， y_2， $\ldots$， y_7， x_i 和 $y_i(1 \leqslant i \leqslant 7, i \in N)$ 分别表示 A 区和 B 区第 i 天上报新增疑似病例人数 (x_i 和 y_i 均为非负). 设 $M = max\{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$， $N = max\{y_1, y_2, \ldots, y_7\}$.

① 比较 M 和 N 的大小；

② 求 M 和 N 中较小的那个字母所对应的 7 个数有多少组？

21. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为A、B，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，长轴长为4，动点S在C上且位于x轴上方，直线AS，BS与直线$l:x=4$分别交于M，N两点.



（1）求$|MN|$的最小值；

（2）当$|MN|$最小时，在椭圆C上可以找出点T使△TSB的面积为$\frac{\sqrt{7}}{20}$，试确定点T的个数。

22. 已知函数$f(x)=alnx+\sqrt{1+x}$（其中$a\neq0$，$e=2.71828\ldots\ldots$）

（1）当$a=-\frac{3}{4}$时，求函数$f(x)$的单调区间；

（2）对任意的$x\in[\frac{1}{e^2},+\infty)$均满足$f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$，试确定$a$的取值范围.

南京二十九中 2022 届高三摸底测试
数学参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分；每题只有一个选项符合题意）

1-5:BABBB　6-8:ACC

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分；每题全选且正确得 5 分，部分选择且正确的得 2 分，有选错的得 0 分）

9.AD　10.ABD　11.AD　12.ABC

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　14. $2\sqrt{3}-\frac{10-4\sqrt{3}}{3}\pi$

15. 4　　16. $[2,2\sqrt{2})\cup[2\sqrt{2}，\ 2\sqrt{3})$.

四、解答题（本大题共 6 小题，第 17 题满分 10 分，其余每题满分 12 分，共 70 分）

17.解：(1)$\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $b=2a-2c\cos B$ 可转化为 $\sin B=2\sin A-2\sin C\cos B$，

又因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=\sin(B+C)$，

所以 $\sin B=2\sin(B+C)-2\sin C\cos B$，

整理得 $\sin B=2\sin B\cos C$，

在 $\triangle ABC$ 中 $\sin B\neq 0$，则 $\cos C=\frac{1}{2}$，

又因为 $C\in(0,\pi)$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$；

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

则 $\cos 2A+\cos 2B=2-2(\sin^2 A+\sin^2 B)$

$=2-2[(\frac{a}{2R})^2+(\frac{b}{2R})^2]=2-\frac{1}{6}(a^2+b^2)$，

又 $\frac{c}{\sin C}=2R=2\sqrt{3}$，所以 $c=3$，

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，得 $ab=8$，

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=9$，所以 $a^2+b^2=17$，

所以 $\cos 2A+\cos 2B=-\frac{5}{6}$；

(2)因为 $\frac{\cos B}{\sin A}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{\cos A}{\sin B}\cdot\overrightarrow{CA}=2m\overrightarrow{CO}$，

所以 $(\frac{\cos B}{\sin A}\overrightarrow{CB}+\frac{\cos A}{\sin B}\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CO}=2m\overrightarrow{CO}^2$，

所以 $\frac{\cos B}{\sin A}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CO}+\frac{\cos A}{\sin B}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}=2m\overrightarrow{CO}^2$，

又 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CO}=\dfrac{a^2}{2}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}=\dfrac{b^2}{2}$，

所以 $\dfrac{\cos B}{\sin A}\cdot\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{\cos A}{\sin B}\cdot\dfrac{b^2}{2}=6m$，

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}$，所以 $a=2\sqrt{3}\sin A$，$b=2\sqrt{3}\sin B$，

代入化简得 $6\sin A\cos B+6sinB\cos A=6m$，所以 $m=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18.解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.

由 $a_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，可得 $d=1$．从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$．

由 $b_1=1,b_5=4(b_4-b_3)$，又 $q\neq 0$，可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$，从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$．

(2) 当 n 为奇数时，$c_n=\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$，

当 n 为偶数时，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\dfrac{n-1}{2^n}$，

对任意的正整数 n，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2^{2k}}{2k+1}-\dfrac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\dfrac{2^{2n}}{2n+1}-1$，

和 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{4^k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{4^n}$ ①

由①得 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\dfrac{5}{4^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^n}+\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$ ②

由①－②得 $\dfrac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4^2}+\cdots+\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$，

由于 $\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4^n}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^n}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{6n+5}{3\times 4^{n+1}}$，

从而得：$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}$.

因此，$\sum_{k=1}^{2n} c_k=\sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n} c_{2k}=\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times 4^n}-\frac{4}{9}$.

所以，数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和为$\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times 4^n}-\frac{4}{9}$.

19. (1) 证明：$\because$平面$ABC\perp$平面ABP，$AC\perp AB$，

平面$ABC\cap$平面$ABP=AB$，$AC\subset$平面ABC，$\therefore AC\perp$平面ABP，

又$\because BP\subset$平面ABP，$\therefore AC\perp BP$，

$\because AB$为直径，$\therefore AP\perp BP$，又$AC\cap AP=A$，$AC,AP\subset$平面ACP，

$\therefore BP\perp$平面ACP，又$BP\subset$平面BCP，$\therefore$平面$BCP\perp$平面ACP.

(2) 解：过点 Q 作$QD\perp AP$交AP于D，

由(1)知$AC\perp$平面ABP，$QD,AP\subset$平面ABP，

因为$AC\perp AP$，$AC\perp QD$，$AC\cap AP=A,AC,AP\subset$平面ACP，

所以$QD\perp$平面APC.

$\because AB=AC=4$，$\angle PAB=\frac{\pi}{6}$，$\therefore AP=2\sqrt{3}$，

因为$S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}AC\times AP=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$为定值.

所以三棱锥$Q-APC$的体积为$\frac{1}{3}QD\cdot S_{\triangle APC}$，

当三棱锥$Q-APC$的体积最大时，Q为$\overset{\frown}{AP}$的中点.

$\because \angle PAB=\frac{\pi}{6}$，$\therefore \overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{QP}=\overset{\frown}{BP}$，且$\angle QAB=\frac{\pi}{3}$.

$\because AB=AC=4$，则$AQ=QP=PB=2$，$AP=2\sqrt{3}$，

$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}AQ\cdot QP\sin\angle AQP=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

在$\triangle CPQ$中，$CQ=\sqrt{AC^2+AQ^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$PC=\sqrt{AC^2+AP^2}=\sqrt{4^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{7}$，

$\therefore \cos\angle CQP=\frac{CQ^2+PQ^2-CP^2}{2CQ\cdot QP}=\frac{20+4-28}{2\times 2\sqrt{5}\times 2}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}$，

$\therefore \sin\angle CQP=\sqrt{\frac{19}{20}}$，

$\therefore S_{\triangle PQC}=\frac{1}{2}CQ\cdot QP\sin\angle CQP=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\times\sqrt{\frac{19}{20}}=\sqrt{19}$.

设点A到平面PCQ的距离为d,则由$V_{A-PCQ}=V_{C-APQ}$,得$\frac{1}{3}S_{\triangle PQC}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle APQ}\cdot AC$，

即$\frac{1}{3}\sqrt{19}\cdot d=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 4$，解得$d=\frac{4\sqrt{57}}{19}$. $\therefore$点A到平面PCQ的距离为$\frac{4\sqrt{57}}{19}$.

20.解：(1) 记事件 C："丙受甲感染"，事件 D："丁受甲感染"，则 $P(C)=0.6$，

$P(D)=0.2$

X 的取值为 1，2，3

$P(X=1)=P(\overline{C}\cdot\overline{D})=0.4\times0.8=0.32$

$P(X=2)=P(C\cdot\overline{D})+P(\overline{C}\cdot D)=0.6\times0.8+0.4\times0.2=0.56$

$P(X=3)=P(C\cdot D)=0.6\times0.2=0.12$

所以 x 的分布列为

X	1	2	3
P	0.32	0.56	0.12

$EX=1\times0.32+2\times0.56+3\times0.12=1.8$

(2)① 对于 B 区，由 $(y_1-2)^2+(y_2-2)^2+\cdots+(y_7-2)^2=22$ 知，

$(y_i-2)^2\leqslant 22(i=1,2,\ \cdots,\ 7)$，因为 y_i 是非负整数，所以 $|y_i-2|\leqslant 4$，即 $y_i\leqslant 6$，

所以 $N\leqslant 6$，当 $y_1,y_2\cdots$，y_7，中有一个取 6. 有一个取 2，其余取 1 时，$N=6$，

对于 A 区，当 $x_1=x_2=x_3=0$，$x_4=x_5=x_6=4$，$x_7=9$ 时，满足"总体均值为 3，中位数为 4"此时 $M=9$，所以 $N<M$

② 当 $N=6$ 时，y. $y_2\cdots$，y_7 只有两种情况：

(i) 有一个是 6，有五个是 1，有一个是 3;

(ii) 有一个是 6，有一个是 0，有两个是 1，其余是 2.

对于 (i) 共有 $C_7^1C_6^5=42$ 组，

对于 (ii) 共有 $C_7^1C_6^1C_5^2=420$ 组，故共有 462 组

21.解：(1) $\because 2a=4,e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore c=\sqrt{3}.\therefore b=1.$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

)设直线 AS 的斜率为 $k(k>0)$.则直线 AS 为 $y=k(x+2)$ 则 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ x=4\end{cases}\Rightarrow M(4,6k)$

设 $S(x_1,y_1),A(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\therefore(4k^2+1)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$

$\therefore x_1x_2 = -2x_1 = \dfrac{16k^2-4}{4k^2+1}, \therefore x_1 = \dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1}, \therefore y_1 = k(x_1+2) = \dfrac{4k}{4k^2+1}$

$\therefore S(\dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1}, \dfrac{4k}{4k^2+1})$

$\because B(2,0) \therefore k_{SB} = -\dfrac{1}{4k} \therefore$ 直线SB :$y = -\dfrac{1}{4k}(x-2)$

$\therefore$ 当$x=4$时, $y = -\dfrac{1}{2k}. \therefore N(4, -\dfrac{1}{2k})$

$\therefore |MN| = |6k + \dfrac{1}{2k}| \geqslant 2\sqrt{3}$, 当且仅当$k = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(k>0)$时取到等号.

(2)当$k = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$时, 则$S(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}). \because B(2,0), \therefore |SB| = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

$\because S_{\triangle TSB} = \dfrac{1}{2}|SB|h = \dfrac{\sqrt{7}}{20}, \therefore h = \dfrac{1}{5}$

$\therefore$ 点T为平行于SB且与SB距离为$\dfrac{1}{5}$的直线m与椭圆的交点.

$\because SB$:$\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}=0, \therefore$ 设m : $\sqrt{3}x+2y+t=0$

则$d = \dfrac{|t+2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+4}} = \dfrac{1}{5}, \therefore t = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{5} - 2\sqrt{3}, \therefore$ 直线m存在两种情况.

$\begin{cases} \sqrt{3}x+2y+t=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$, 则$4x^2+2\sqrt{3}tx+t^2-4=0$.

$\therefore \Delta = -4(t^2-16)$

当$t = -\dfrac{\sqrt{7}}{5} - 2\sqrt{3}$时, $\Delta = -4 \times (\dfrac{7}{25} + 12 + \dfrac{4\sqrt{21}}{5} - 16) > 0$,

$\therefore t = -\dfrac{\sqrt{7}}{5} - 2\sqrt{3}$时, 直线$m$与椭圆有两个交点.

当$t = \dfrac{\sqrt{7}}{5} - 2\sqrt{3}$时, $\Delta = -4 \times (\dfrac{7}{25} + 12 - \dfrac{4\sqrt{21}}{5} - 16) > 0$,

$\therefore t = \dfrac{\sqrt{7}}{5} - 2\sqrt{3}$时, 直线$m$与椭圆有两个交点.

综上所述, 直线m与椭圆有四个交点, 即点T有四个.

22.解：(1) 当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)=-\frac{3}{4}lnx+\sqrt{1+x}$，$x>0$，

$f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3)$，单调递增区间为 $(3,+\infty)$．

(2) 由 $f(1)\leqslant\frac{1}{2a}$，得 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$，

当 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，$f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{4a}$，等价于 $\frac{\sqrt{x}}{a^2}-\frac{2\sqrt{1+x}}{a}-2lnx\geqslant 0$，

令 $t=\frac{1}{a}$，则 $t\geqslant 2\sqrt{2}$，

设 $g(t)=t^2\sqrt{x}-2t\sqrt{1+x}-2lnx$，$t\geqslant 2\sqrt{2}$，

则 $g(t)=\sqrt{x}(t-\sqrt{1+\frac{1}{x}})^2-\frac{1+x}{\sqrt{x}}-2lnx$，

(i) 当 $x\in[\frac{1}{7},+\infty)$ 时，$\sqrt{1+\frac{1}{x}}\leqslant 2\sqrt{2}$，

则 $g(x)\geqslant g(2\sqrt{2})=8\sqrt{x}-4\sqrt{2}\sqrt{1+x}-2lnx$，

记 $p(x)=4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{1+x}-lnx$，$x\geqslant\frac{1}{7}$，

则 $p'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}=\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$

$=\frac{(x-1)[1+\sqrt{x}(\sqrt{2x+2}-1)]}{x\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}$，

列表讨论：

x	$\frac{1}{7}$	$(\frac{1}{7},1)$	1	$(1,+\infty)$
$p'(x)$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$p(\frac{1}{7})$	$\downarrow$	极小值 $p(1)$	$\uparrow$

$\therefore p(x)\geqslant p(1)=0$，

$\therefore g(t)\geqslant g(2\sqrt{2})=2p(x)=2p(x)\geqslant 0$．

(ii) 当 $x\in[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7})$ 时，$g(t)\geqslant g(\sqrt{1+\frac{1}{x}})=\frac{-2\sqrt{x}lnx-(x+1)}{2\sqrt{x}}$，

令 $q(x)=2\sqrt{x}lnx+(x+1)$，$x\in[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}]$，

则 $q'(x)=\frac{lnx+2}{\sqrt{x}}+1>0$，

故 $q(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}]$ 上单调递增，$\therefore q(x)\leqslant q(\frac{1}{7})$，

由 (i) 得 $q(\frac{1}{7})=-\frac{2\sqrt{7}}{7}p(\frac{1}{7})<-\frac{2\sqrt{7}}{7}p(1)=0$，

$\therefore q(x) < 0$，$\therefore g(t) \geqslant g(\sqrt{1+\frac{1}{x}}) = -\frac{q(x)}{2\sqrt{x}} > 0$，

由 $(i)(ii)$ 知对任意 $x \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$，$t \in [2\sqrt{2}, +\infty)$，$g(t) \geqslant 0$，

即对任意 $x \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$，均有 $f(x) \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2a}$，

综上所述，所求的 a 的取值范围是 $(0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$.