

南京市第十三中学期初检测卷

2021 年 8 月

注意事项：

1、本试卷共 7 页，涉及内容为 2022 年高考范围内全部，满分 150 分。

一、单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合要求）

1. 已知集合 $X = \{x \mid x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$, 则 $i \cap C_A \cup B \cap (A \cap B)^c \cap J$

- A. $[-1, 4)$ B. $(3, 4)$ C. $[-1, 2) \cup [3, 4)$ D. $[\frac{1}{2}, 2] \cup (3, 4)$

1-4 2021

- A. B. C. D. 0

【解析】 $z = \frac{2021}{1-i} = \frac{2021(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2021(1+i)}{2} = \frac{2021}{2}(1+i)$

若 i 为虚数单位，则 M 的值为

3. 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，则当 $0 \leq x \leq 2$ 时， $f(x) = \sin 2x$ ，若 $f(1) = \frac{1}{2}$ ，则

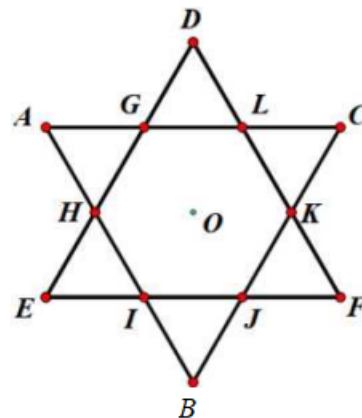
斜切面的值为（注： $f'(x)$ 表示对原函数 $f(x)$ 的导数）

D. 段一 2

【解析】用 $x+2$ 代替 x 得 $f(x+2) = -f(x)$ ，即 $f(x) = -f(x+2)$ ，即 $f(x)$ 的周期为 4，结合其他已知条件可知在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x) = \sin 2x$ ，故 $g(x) = (\sin 2x)^2 = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ ， $f'(x)g(x) = 2\cos 4x - 2$ ，故

知条件可知在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x) = \sin 2x$ ，故 $g(x) = (\sin 2x)^2 = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ ， $f'(x)g(x) = 2\cos 4x - 2$ ，故

4. 所罗门封印（又称“六芒星”）是犹太教和犹太文化的标识，1949 年以色列也将六芒星置于本国的国旗之上，所以六芒星也是以色列的象征。如下图所示，六芒星由两个完全相等的正三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 构成，中心均在点 O 。六条边的交汇处为点 G, H, I, J, K, L ，均为所在线段的三等分点。则下列平面向量的拆分中，错误的是



- A. $\vec{AG} + \vec{HI} = \vec{OC} + \vec{OB}$
B. $\vec{EJ} + \vec{FI} = \vec{DK} - \vec{FL}$
C. $\vec{CK} + \vec{FH} = -\vec{JG}$

2

D. $OG+2OK=ED+EF$

【解析】A 项中均等于 $\frac{1}{2}AB$ ；B 项中均等于 0；C 项中 $ck+FH=ck+KA=CA=JG$ ；D 项中 $OG+2dk=OB=ED+EF$

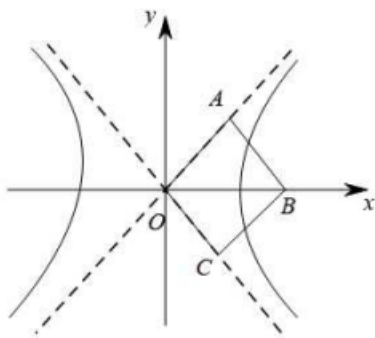
5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线为正方形 $OACB$ 的边， O 为坐标原点， C 为双曲线右支上一点， OC 所在的直线与双曲线的另一支交于点 D 。若正方形 $OACB$ 的面积为 4，则 $\frac{OD}{OC}$ 为

- A. 1 B. 2 C. $\frac{2}{3}$ D. 4

(2016 北京理) 2 【解析】不妨令 C 为双曲线的右焦点， K 在第一象限，则双曲线图象如图，

$\because OACB$ 为正方形， $|OC| = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore |OD| = 2\sqrt{2}$ ， $\angle AOB = 90^\circ$

，直线 ON 是渐近线，方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，又 $\frac{b}{a} = 1$ ， $\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$ 。



6. 多项式 $(x^2+x+5)^4$ 的展开式中，含 x^3 项的系数是

- A. 32 B. 170 C. 320 D. 650

【解析】过程与 1 类似

新高考资料钉子培优...

群号：939251701



扫一扫二维码，加入群聊。

96.-(213, 2.3 活动单 P31)求 $(x^2 + 3x + 2)^4$ 的展开式中含 x^5 项的系数...

【答案】180,

【解析】“

方法一：括号内因式分解，转化成 $(x + 1)^4(x + 2)^4$ ，分别展开，分类讨论求解；“

方法二：(普遍适用) $(x^2 + 3x + 2)^4 = [2 + x(x + 3)]^4$ ，通项为 $C_4^r 2^{4-r} x^r (x + 3)^{4-r}$ ，对于 $(x + 3)^{4-r}$ ，通项为 $C_{4-r}^s 3^{4-r-s} x^s$ 。则 $T_{r+s} = C_4^r 2^{4-r} C_{4-r}^s 3^{4-r-s} x^{r+s} = C_4^r C_{4-r}^s 2^{4-r} 3^{4-r-s} x^{r+s}$ 。现令 $2r + s = 5$ (且 $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, 5 \leq r \leq 4$)，则或 $r=4$ ，两种情况代入上式 $T_{r+s} = C_4^r C_{4-r}^s 2^{4-r} 3^{4-r-s} x^{r+s}$ 相加即可...

$$[s=1][s=3]$$

方法三：排列组合： $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$ ，要想乘出 x^5 项，可以有以下几种组合的方法：

① $2 + 1 + 1 + 1$ ：某一个括号里出 x^2 ，另外三个括号里出 x (下同)；② $2 + 2 + 1 + 0$ 。①对应的情况相加为： $C_4^1 (3x)^3 = 108x^5$ ；②对应的情况相加为： $C_4^2 (x^2)^2 (3x) = 72x^5$ ，相加即可...

7. 在生物的遗传学与变异学中，很多概率的计算需要用到相关数学知识，需要同学们良好的数学运算能力。为调查“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”是否相关，年级组展开了一次小调查，得到如下 2×2 列联表：(单位：人)

	遗传学成绩优秀	遗传学成绩一般
概统成绩优秀	72	18
概统成绩一般	53	32

附表：

χ^2, x_0	0.100	0.050	0.010	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	10.828

下列说法正确的是

- A. 有 99.9% 的把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
 B. 仅有 99% 的把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
 C. 仅有 95% 的把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
 D. 没有把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关 【解析】 $\chi^2 = 6.67$

8. 在平面直角坐标系中， $O_1 C_1: (x - \lg 8)^2 + 0 + 1110.5^2 = 2.25$ ， $O_2: (x - \lg 2)^2 + (y + \ln 4)^2 = 0.25$ ，

判断两圆的位置关系为

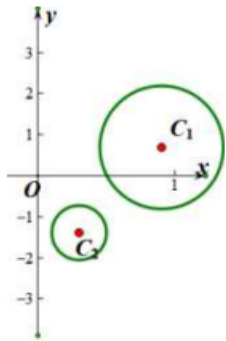
A. C_1 与 C_2 外离

B. G 与 C_2 相切

C. G 与 C_2 相交

D. C_2 内含于 G

【解析】 $G(lg8, \ln2)$, $C_2(lg2, \ln4)$, $|QC_2| = \sqrt{(lg8 - lg2)^2 + (\ln2 - \ln4)^2} = \sqrt{Jig^2 + hi^2} = 2$, 其中



$lg4 > 0.5, \ln2 > 2$, 故 $I g$ 巨 $Jig^2 + 静 8 > 应^2$, 而 $* + ^ = 2$, 两圆外离, 参考图如下

二、多项选择题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的 4 个选项中, 有 2~3 项符合要求, 选不全得 2 分, 错选得 0 分)

9. 下列说法正确的是

A. 函数 $J(x) = x + \sin x - x(\cos x)$ ($-2\pi \leq x \leq 2\pi$) 既不是奇函数也不是偶函数

B. 对于某一单调递增的函数 $f(x)$, 取定义域上任意一点 $(x_0, f(x_0))$, 总有 $f'(x_0) > 0$

C. 不与坐标轴平行或垂直的直线的方程一定可以写成两点式或斜截式

D. 对于向量 a, b, c , 若 $a \parallel b$, $b \parallel c$, 则 $a \parallel c$

【解析】 A 的定义域不对称; B 中导数大于等于 0, 要含等号, 反例 $f(x) = x^3$; D 中漏考虑 0

10. 在全国政协 2021 新年茶话会上, 习近平总书记强调要发扬“三牛精神”, 之后的某次语文周测也要求写一篇关于此的作文题纲。同学们阅读完相关材料后, 需从“孺子牛精神”“老黄牛精神”“拓荒牛精神”中任选其一进行写作 (假设每个主题被选择的概率都相同)。开始阅卷后, 语文组的从老师 和熊老师同时以相同的速度进行批改。下列说法正确的是

A. 若从老师改了三篇作文, 则三篇作文均以“老黄牛精神”为主题的概率是 $\frac{1}{3}$

B. 若从老师改了三篇作文, 则三篇作文主题各不相同的概率是 $\frac{2}{3}$

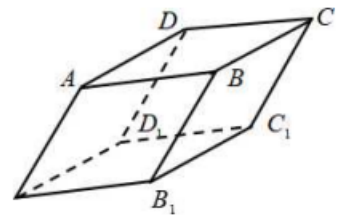
C. 若两位老师均改了三篇作文, 其中从老师改到的主题依次是“老黄牛精神”、“孺子牛精神”、“拓荒牛精神”, 则熊老师此时已经改到相同主题文章的概率是 $\frac{1}{3}$

D. 若两位老师均改了三篇作文, 她们约有 $\frac{2}{3}$ 的概率同时批改同一主题的作文

【解析】 C 选项可以从反面考虑

11.如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，各棱长均为 1， $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle D_1AB = \angle D_1AC$ ，则下列说法正确的是

法正确的是



第

1

1

题

图

- A. $ABDC_1$ 为等边三角形
- B. 直线 $BC_1 \perp$ 平面 ABD_1
- C. BC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. 该平行六面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4

12.南示市第十三中学始建于 1955 年，正对校门的老教学楼可谓是其历史最悠久的

“文物”，但因其内部年久失修而多发停电事故。为解决此类问题，学校决定在

楼层的地面上铺设一条主电缆，首先保证二楼从 J 点到 3 点的正常输电。经测量发现，每间教室长 7.5 米，相对教室之间的走廊宽 2 米，如图所示。已知紧靠墙角的电缆铺设费用为 30 元/米，而暴露在走廊中间由缆有安全隐患，须将罩干抽

下，费用为 40 元/米。则下列有关铺设方案预算的估计中，正确的是(参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$)

- A.若沿折线 J-C3 铺设，费用为 960 元
- B. 若沿直线段 J-3 铺设，费用消耗一定比沿折线 J-C3 铺设高
- C. 在 AC 上取一点沿折线 J-C-P 铺设，为使费用消耗最低，应使 $CQ=2.268m$
- D.在 C 选项的条件下，最终费用消耗将低于 AB 选项

【解析】

设总费用为 y 元

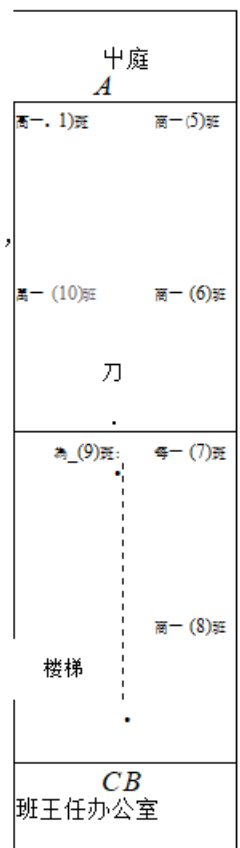
方案一： $y = 960$ ；[2 分]

方案二： $y = 40 \times 9.04 > 40 \times 9.00 = 40 \times 30 > 960$ ，

故方案二费用一定比方案一高，不予考虑；[2 分]

方案三：设 $CQ = x$ m

则 $y = 30(30 - x) + 40\sqrt{x^2 + 4} = 900 - 30x + 40\sqrt{x^2 + 4}$



[8分, 若仅列出第一个式子, 得2分]

$$V_A/x^2 + 4 + x > 0 \quad [1 \text{ 分}]$$

$\therefore FF > 900 + 20A/7$, 当且仅当, $\frac{140}{\sqrt{x^2+4+x}} = 5(\sqrt{x^2+4+x})$ 即 $x = 2$ 匝时取等 [2分]

$$\therefore 900 + 20 \times 7 < 960$$

$\therefore$ 方案三比方案一省钱 [2分]

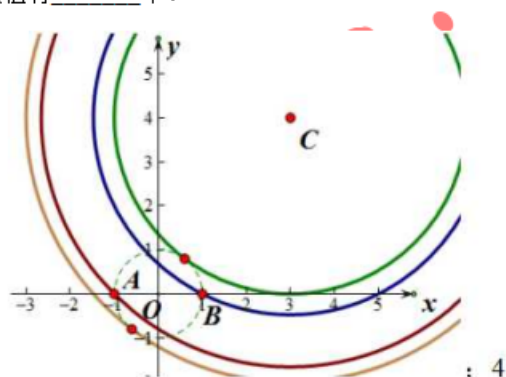
答: 先修牛 m 的直电缆, 再斜修向 3 点, 费用最小值为 (900 + 2077) 元。 [1分]

具体计算过程:

$$\begin{aligned} & \text{瓶二 } 30(30 - x) + 407x^2 + 4 \\ & = 900 - 30x + 407x^2 + 4 \\ & = 900 + 35(\sqrt{x^2+4} - x) + 5(\sqrt{x^2+4} + x) \\ & = 900 + 35 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 + 5(\sqrt{x^2+4} + x) \\ & = 900 + 70 + 4 + 5(\sqrt{x^2+4} + x) \end{aligned}$$

三、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

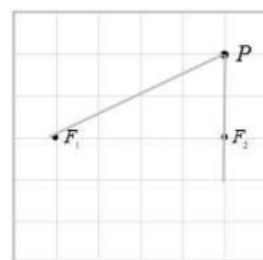
同取值有 _____ 个。



13. 已知 $G: C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, 须 $(-1, 0)$, $S(1, 0)$ 若 $OC \perp$ 仅存在一点 P 使切上研, 贝 $ij \perp P I$

【解析】

14. 在如图所示的“6cmX6cm”规格的方格纸中, 已标有户 1、户 2 两格点 (格点指方格线相交的点) 共存在 _____ 个格点 P 使得 $|再 \setminus | - | 叨| = 2 \text{ cm}$ 。



图

第

1

4

题

【解析】3

15. 美丽的晶体构成了大千世界，金 Au、银 Ag 等贵金属在自然界中常以晶体形式存在，其堆积方式均为 面心立方体堆积（如图甲所示）。图乙所示的立方体结构是一种“晶胞”，该晶胞的八个顶点处各有 半径为 R 的球，在六个面上均有半径为 R 的半球，则图乙所示的晶胞边长为_____（用含 R 的代数式表示）。若定义空间利用率 $\eta = \frac{\text{晶胞内原子总体积}}{\text{晶胞体积}}$ ，则 η （图乙所示的晶胞）为_____ 0



第 15 题 图甲



图乙

【解析】2 由 R 、 η

6

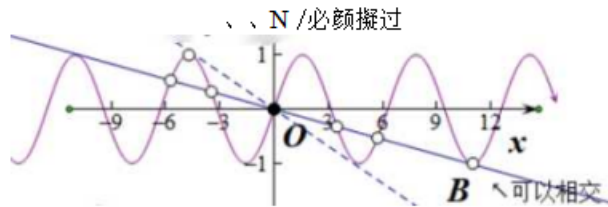
16. _____ 若函数 $f(x) = kx^2 + \cos x$ 有 5 个极值点，则左

【解析】

33、【★★☆☆☆】若函数 $f(x) = Ax^2 + \cos x$ 有 5 个极值点，求 A 的取值范围。

【来源：2019 级高二 14 班·王耀鑫；收录时间：2021.5.3】

则 $f'(x) = 2Ax - \sin x = 0$ 有 5 个解，即方程 $2Ax = \sin x$ 有 5 个变号解，作出图像：



4(Y.71, 1.00) 2
B. (10.99, -1.00)

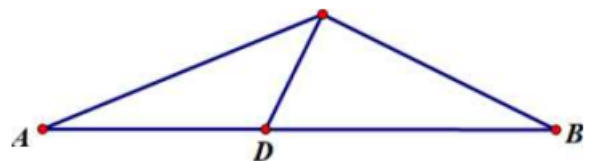
直线的斜率是 $2A$ ，且要保证与正弦函数图像有 5 个非切点的交点，则直线必须在 $-\frac{1}{\pi}$ 以下，

但不能在以下，故即 $k \in (-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{3\pi})$ 。
(2) $\frac{1}{3\pi} < A < \frac{1}{\pi}$

四、解答题（共 6 小题，共 70 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本小题共 8 分）在 $\triangle ABC$ 中， $|EC| = 4$ ， $\cos B = \frac{1}{2}$ 。在 BC 上， $WCDLCP$

- (1) 求 $\triangle BCQ$ 的面积；
- (2) 若 D' 为 AB 的中点，求 $|AC|$ 。



【解析】(1) $\frac{1}{2}$ ；(2) $|AC| = 6$ 。

(1) 得出 $m = \frac{1}{2}$ ……2 分；得出面积 $\frac{1}{2}$ ……4 分；(2) 得出 $|BD| = |DA| = 3$ ……6 分，在中用余弦定理得质（其他方法亦可）……8 分

18. （本小题共 10 分）在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 3$

- (1) 若 $a_n = 2^n$ ，求证： $\{a_n - 1\}$ 是等比数列；
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【解析】

(1) 由题意得 “臨 W+1
2 上- 2 罗 + 2* 「

7H.
 $b_n - b_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n, \frac{b}{b_n} \sim_{n-1} \sim$ 汪 H 为定值且知

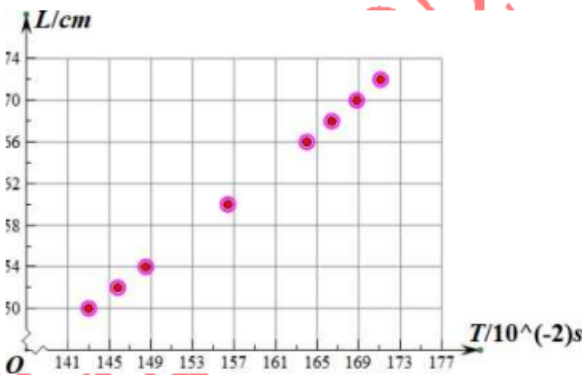
(2) 妇 3* $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}, b_{n-1} - b_{n-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdots \cdots b_2 - b_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{累加得 } b_n = b_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i$

$\sum_{i=2}^{W-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i = -2x - \frac{2x}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} i_{n,r} = 1-2x - \frac{9}{4} 2x \mid -$
，故

10 分

19. （本小题共 12 分）在学习“用单摆测量重力加速度”的新课前，高二 14 班的童同学本着强烈的求知欲与好奇心，为探究摆长 L 一周期 T 之间的关系，提前做了实验：

① 将细线穿过球上的小孔做成一个单摆，并测量摆线的长度 L



② 将铁夹固定在铁架台上方，铁架台放在桌边，使铁夹伸到桌面以外，使摆球自由下垂。

③ 把小球拉开一个角度（小于 5 度）使在竖直平面内摆动，测量单摆完成全振动 30 到 50 次所用的平均时间，求出周期 T

④ 整理数据如表，并在坐标纸上画出 L-T 的散点图：

实验次数	1	2	3	4	5	6	7	8
L/cm	50	52	54	60	66	68	70	72
T/s	1.430	1.458	1.485	1.564	1.640	1.664	1.688	1.711

(1) 童同学认为这些点分布在“2=泌+”附近，而同桌的韩同学则认为分布在“A=c• 2"+e”附近，他们各自计算了样本的相关系数，童同学为”，韩同学为尸2，口”>,2。请依此选择一个合适的拟合模型，并说明理由。

(2) 在（1）的选择下，童同学为使二者的线性关系更明显，用x代替八对数据作出如下计算与处理：

实验次数	1	2	3	4	5	6	7	8
L/cm	50	52	54	60	66	68	70	72
x=T ² /s ²	2.045	2.216	2.205	2.446	2.690	2.769	2.849	2.928

$\sum_{i=1}^8$	$\sum_{i=1}^8 T_i t_i$	$\sum_{i=1}^8 X_i t_i$	$\sum_{i=1}^8 (T_i - \bar{T})(t_i - \bar{t})$	$\sum_{i=1}^8 (X_i - \bar{X})(t_i - \bar{t})$	$\sum_{i=1}^8 (X_i - \bar{X})^2$
61.5	1.580	2.507	6.730	21.413	0.850

试求 i 关于 r 的线性回归方程。（单位略去；结果保留两位小数）

附：线性回归方程 $y = bx + a$ 中， $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $a = \bar{y} - b\bar{x}$ ， $25.19 \times 2.507 = 63.15133$ ， $4 \times 2^2 = 39.48$

(3) 事后，童同学翻看了课本的最后一课时，发现了真正的单摆周期公式“ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ”，则该实验中，最终测出的重力加速度 g 为 9.94 m/s^2 ；（结果保留两位小数）

(4) 根据 (2) 中求出的线性回归方程，下列说法正确的是 C。

- A. 实验步骤完全正确
- B. 实验步骤有些许误差，规范操作后的 g 测量结果更小
- C. 实验步骤有些许误差，但对 g 的测量无影响
- D. 可由实验结论推出所用钢球的半径为 1.65 cm，该钢球的尺寸选用较为合适

【解析】(1) 选用“ $L = bT^2 + a$ ”……1分；因为 Z 与 T 正相关， $r_1 > r_2$ 即 $|r_1| > |r_2|$ （或用 r 表示），故童同学选用的拟合模型更精确……2分

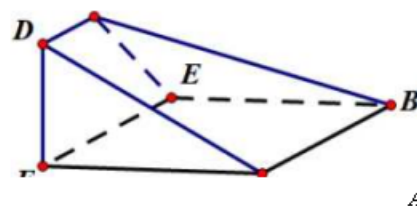
(2) 公取 25.19……4分，2取 1.65……6分，故 $L = 25.19 \times 1.65 = 41.5625$ ……7分（若保留错小数位扣 1分）

(3) 9.94（9.92~9.96 均可）……9分

(4) C……12分

20. （本小题共 14分）如图，五面体 $ABCDEF$ 中， $ABEF$ 为正方形， $|AF| = 2|FD|$ ， $\angle AFD = 90^\circ$ ，二面角 $A-FE$ 和 $C-BE-F$ 大小均为 45° 。

- (1) 求证：平面 $ABEF \perp EFDC$ ；
- (2) 求二面角 $C-BE-F$ 的余弦值。



【解析】（2016 • 全国 I 理）

正方形 $ABEF \perp EF$ ，

(1) 直角 $\angle AFD = 90^\circ$ ， $\angle AFE = 90^\circ$ ， $\angle FED = 90^\circ$ ……2分

Cl,u,u

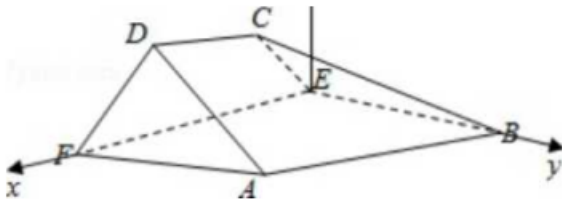
R.AF 在面 ABEF 内, 则平面 ABEF $\perp$ EFDC3 分

(2) FA 与 FD、FE 均垂直, 则 D—AF—E 的平面角为 ZDFA,

同理 C—BE—F 的平面角为 ZCEF, ZDFA=ZCEF=60°5 分

若证出 CD//EF, 加上底角相等, CDEF 就是等腰梯形

先证 AB // 面 CDEF, 得 AB//CD, 再由正方形得 AB//EF, 则“CDEF 是等腰梯形”得证8 分 建系如下



设 $\overrightarrow{FD}=\mathbf{a}$ (求法向量之前表示向量用, 若直接令 $\mathbf{a}$ 为 1 则扣 1 分) (表示出必要的向量后)....., 则平面 BEC 的一个法向量为 (仍, $0, -1$)10 分 平面 ABC 的一个法向量为 (0, 4, 4)12 分 由观察可知二面角 E-BC-A 为钝角, 记为 θ , 代入公式得 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 14 分

419

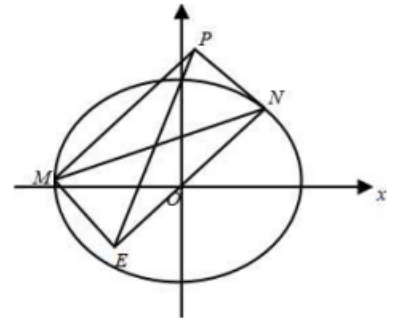
21. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F_1 , 右焦点为 F_2 , 上顶点为 A, 且满足 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6, $|AF_1| - |AF_2| = 2$. 斜率为 k 的直线 l 交 C 于 M, N 点, 另有定点 E ($-1, -1$) 和平面内的一 2

点 P
八、

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若四边形 ENPM 为平行四边形, 是否存在顶点 Q 使 $|PE|^2 - |PQ|^2$ 为定值? 若存在, 则求出 Q 点坐标和该定值; 若不存在, 说明理由。

y



【解析】

(1) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1$ (若仅列对方程给 2 分)

(2) 设点 $J, N(x_2, y_2)$, 则在 $\triangle EAM$ 中, $x_2 + |y_2 + y_E|$ 5 分

设 $MV: y = -x + 7$, 与 C 联立得 $x^2 + mx + 7 - 2 = 0$ 7 分

3 根据 $\Delta > 0$ 得 $-2 < m < 2$ 则有 $m + 2 = -7$, $x_1 + x_2 = -m$ 8 分

故 $41 - m$ 很+也、 9 分

且根据 P 的参数坐标可知为线段 $\hat{P} = -|x| + |(-1 < x < 3)|$ 的一动点 10 分

(若' 十 艮 据 $\Delta > ()$ 得 $-2 < m < 2$ 与 $v = -m$ ($-1 < x < 3$) 均未写出, 才口 2 分) 不妨将 P, B, Q 三点看成一直角三角形

当 O 点是直角顶点 (万向 $y = -|x| + |(-1 < x < 3)|$ 作垂线的垂足) 时, 岡一河为定值曲 2

11 分

岡一河为万到 1 书的距离平方: 群, 此时 O 借糸° 13 分

22. 已知函数 $X(x) = ar-r^{a-1} \ln x$, 回答下列问题:

(1) 求 $f(x)$ 在 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

$v+1$

(3) 解不等式: $x^2 - x + |x| - 1 \geq 0$
 $x^2 + 1$

【解析】

(1) $f(x) = (1 - a)x^a - x^a \ln x - x^2 + 67$

$a-2$

且 $f(e) = 6e - 1$ 3 分

故 $f: (1 - \ln 2) \rightarrow +\infty$ 4 分

(2) 此时 $f(x) = x - \ln x$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ (不写定义域 “ $x > 0$ ” 扣 1 分) 5 分

若 $f'(x) < 0$, 则 $0 < x < 1$, 故单调减区间为 $(0, 1)$ 6 分

同理, 单调增区间为 $(1, +\infty)$ 7 分

(3) 为使该不等式有意义的条件是 $x > -1$ 8 分

同构变形: $x^2 + 1 - \ln(x^2 + 1) > x + 1 - \ln(x + 1)$

利用 (2) 中的结论: 构造 $f(x) = x - \ln x$ 得 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ (当 $x > -1$) 10 分

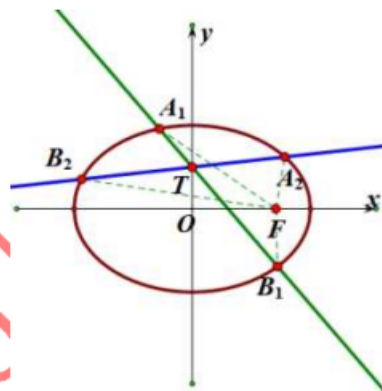
$f(x) = x - \ln x$ 的单调减区间为 $(0, 1)$, 且此时 $x^2 + 1 < x + 1$ 恒成立, 取 $0 < x < 1$

$f(x) = x - \ln x$ 的单调增区间为 $(1, +\infty)$, 且当 $x^2 + 1 > x + 1$ 成立时, $x < 0$ 或 $x > 1$, 取 $x > 1$

(本小题共 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一条准线为 $l: x = 4$, $T(0, 1)$ 为其短轴的四等分点(靠近椭圆上顶点), 过点 T 作两条直线分别交 C 于 A_1, B_1 和 A_2, B_2 . F 为 C 的一个焦点

(1) 求 C 的标准方程;

②若两条直线的斜率之和为定值 $t \in \mathbb{R}$, 试问: 是否存在实数 t 使得 $|FA_1| + |FB_1|$ 也为定值? 若存在, 求出 t 与该定值; 若不存在, 请说明理由。



【解析】(1) 由点 T 的条件得 $b = 2$, 由准线的条件得 $\frac{a^2}{c} = 4$

2 分

再联立 $a^2 = b^2 + c^2$,
故 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 设两条直线分别为 l_1, l_2 , 斜率分别为 k_1, k_2

取一般情况: $l_1: y = k_1x + 1$ 与 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

与 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 联立得 $(2k_1^2 + 1)x^2 + 4k_1x - 6 = 0$, 故 $x_1 + x_2 = \frac{6}{2k_1^2 + 1}$, 从而 $|FA_1| + |FB_1| = \frac{6}{2k_1^2 + 1} + 2 = 2$

由椭圆第二定义: $|FA_1| = e|x_1|, |FB_1| = e|x_2|$

23. (本小题共 12 分) 已知函数 $f(x) = \cos x$, 试回答下列问题: $x \in [0, 1]$

(1) 求证: 在 $[0, 1]$ 上恒成立;

(2) 求证: $(1 + \frac{1}{2})^2 < (1 + \frac{1}{3})^3 < 2$ (篇幅)

【解析】(1) $f'(x) = -\sin x$ 在 $[0, 1]$ 上恒 < 0

$\therefore f(x) = \cos x$ 在 $[0, 1]$ 上恒 < 0

∴ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减

$f(0) = 1 > 0, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -$, 取 α 为 0.5 即可, 则 $f(\alpha) < 0$

$f(x)$ 上连续, 且 $f(0) > 0$

$$\left(\frac{\pi}{6}, 1\right),$$

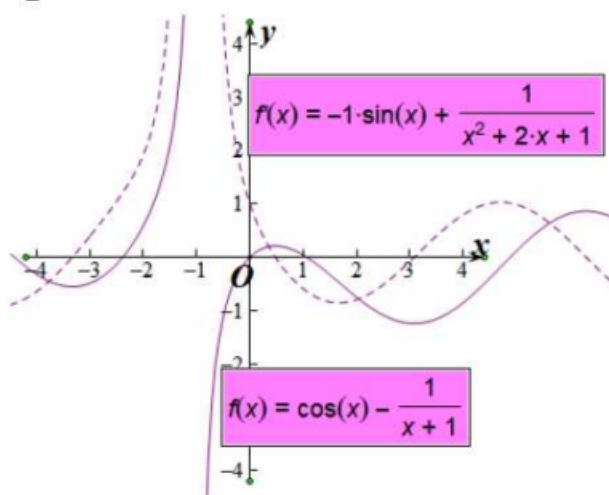
为证明 $f(x)$ 的最小值 $f(x) > 0$, 先用隐零点法确定 x_0 的位置:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\cos x_0}$$

而 $f(0) = 0, f(1) = \cos 1 - \frac{1}{2} \approx \cos 57.3^\circ - \cos 60^\circ > 0$, 故得证。

$3x_0$

$f(x) = 0$



(2) 可将 (1) 中的结论化为 $\frac{1}{\cos x} \leq x+1$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 显然 $\frac{1}{2^n}$

又 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 故当 $0 \leq x < x_0$ 时, $f(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x_0 < x \leq 1$ 时, $f(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 待证的 $f(x) > 0$ 便转化成了 d ;

2 "

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots$$

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	D	D	D	C	B	A
9	10	11	12	13	14		
AC	ACD	AB	ABD	4	3		

】5.2 国（2分）；辛（3分）

17. (1) ?; (2) (4分)

18. (1) 证明略（3分）； (2) $\frac{1}{4} = 2''$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

19. (1) 选用“ $L=b f+ci$ ”（1分）；因 Z 与丁正相关， $n>r_2$ 即“ $|>|P|$ ”（或用 R 表示），16.

1分）； (3) 9.94（2分，9.92~9.96 均可）； (4) C（3分）

20. (1) 证明略（3分）； (2) $\frac{1}{419}$ （11分） $= 3^{w+1} \cdot 7 \times 2^{w-1}$ (7分)

21. (1)

22. (1) 1: $(1-(-2))m+[-1$ (4分)； (2) 单调减区间为 $(0,1)$, 单调增区间为 $(1, +8)$ 故童同学选用的拟合模型更精确（1分）； (2) $2=25.19r^2-1.65$ （5分，若保留错小数位扣（3分）； (3) $(1, +8)$ (6分)