

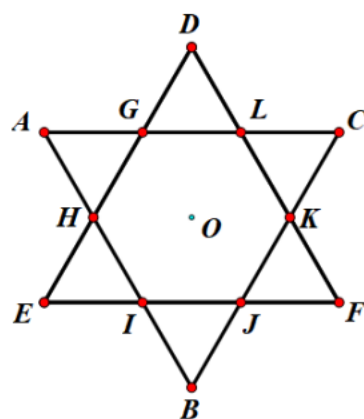
南京市第十三中学期初检测卷

2021 年 8 月

本试卷共 8 页，涉及内容为 2022 年高考范围，满分 150 分。

一、单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合要求）

- 已知集合 $A = \{x \mid x \leq 3 \leq 2x\}$, $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$, 则 $[A \cup B(A \cap B)]$ 为
 A. $[\frac{3}{2}, 4)$ B. $(3, 4)$ C. $[\frac{3}{2}, 2) \cup [3, 4)$ D. $[\frac{3}{2}, 2] \cup (3, 4)$
- 若 i 为虚数单位, $z = \frac{1-i}{1+i}$, 则 $\sum_{k=1}^{2021} z^k$ 的值为
 A. i B. $-i$ C. 1 D. 0
- 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $-f(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{f(x)}$, 且当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = \sin 2x$. 若 $g(x) = f^{(2)}(x)$, 则 $f(\frac{\pi}{16}) \cdot g(\frac{\pi}{16})$ 的值为 (注: $f^{(2)}(x)$ 表示对原函数 $f(x)$ 的二次求导)
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} - 2$
- 所罗门封印 (又称“六芒星”) 是犹太教和犹太文化的标识, 1949 年以色列将六芒星置于本国的国旗之上, 所以六芒星也是以色列的象征。如下图所示, 六芒星由两个完全相等的正三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 构成, 中心均在 O 点。六条边的交汇处为点 G, H, I, J, K, L , 且均为所在线段的三等分点。则下列平面向量的拆分中, 错误的是
 A. $\vec{AG} + \vec{HI} = \vec{OC} + \vec{OB}$
 B. $\vec{EJ} + \vec{FI} = \vec{DK} + \vec{FL}$
 C. $\vec{CK} + \vec{FH} = \frac{3}{2}\vec{JG}$
 D. $\vec{OG} + 2\vec{OK} = \vec{ED} + \vec{EF}$
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 OA, OC 所在的直线, 且点 B 为该双曲线的焦点。若正方形 $OABC$ 的面积为 4, 则 a 为
 A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
- 多项式 $(x^2 + x + 5)^4$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数是
 A. 32 B. 170 C. 320 D. 650



7. 在生物的遗传学与变异学中，很多概率的计算需要用到相关数学知识，需要同学们良好的数学运算能力。为调查“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”是否相关，年级组展开了一次小调查，得到如下 2×2 列联表：（单位：人）

	遗传学成绩优秀	遗传学成绩一般
概统成绩优秀	72	18
概统成绩一般	53	32

附表：

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	10.828

下列说法正确的是

- A. 有 99.9% 的把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
 B. 仅有 99% 的把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
 C. 仅有 95% 的把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
 D. 没有把握认为“生物遗传学章节成绩优秀”与“数学概率统计章节成绩优秀”有关
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C_1: (x - \lg 8)^2 + (y + \ln 0.5)^2 = 2.25$ ，圆 $C_2: (x - \lg 2)^2 + (y + \ln 4)^2 = 0.25$ ，判断两圆的位置关系为
- A. C_1 与 C_2 外离 B. C_1 与 C_2 相切 C. C_1 与 C_2 相交 D. C_2 内含于 C_1

二、多项选择题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的 4 个选项中，有 2~3 项符合要求，选不全得 2 分，错选得 0 分）

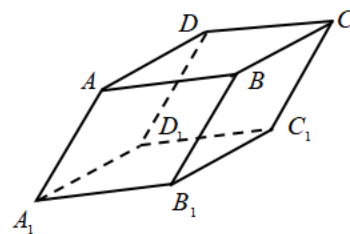
9. 下列说法中正确的是
- A. 函数 $f(x) = x + \sin x - x(\cos x)$ ($-2\pi \leq x < 2\pi$) 既不是奇函数也不是偶函数
 B. 对于某一单调递增的函数 $f(x)$ ，取定义域上任意一点 $(x_0, f(x_0))$ ，总有 $f'(x_0) > 0$
 C. 不与坐标轴平行或垂直的直线的方程一定可以写成两点式或斜截式
 D. 对于向量 a, b, c ，若 $a \parallel b, b \parallel c$ ，则 $a \parallel c$
10. 在全国政协 2021 新年茶话会上，习近平总书记强调要发扬“三牛精神”，之后的某次语文周测中也以此为契机，要求同学们写一篇有关于此的作文题纲。同学们阅读完相关材料后，需从“孺子牛精神”“老黄牛精神”“拓荒牛精神”中任选其一进行写作（假设每个主题被选择的概率都相同）。开始阅卷后，语文组的从老师和熊老师同时以相同的速度进行批改，则
- A. 若从老师改了三篇作文，则三篇作文均以“老黄牛精神”为主题的概率是 $\frac{1}{27}$

B. 若从老师改了三篇作文，则三篇作文主题各不相同的概率是 $\frac{1}{9}$

C. 若两位老师均改了三篇作文，其中从老师改到的主题依次是“老黄牛精神”、“孺子牛精神”、“孺子牛精神”，则两位老师此时已经改到相同主题作文的概率是 $\frac{8}{9}$

D. 若两位老师均改了 k 篇作文，她们约有 $\frac{k}{3}$ 的概率同时批改的作文为同一主题

11. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，各棱长均为 1，且 $\angle AA_1B = \angle AA_1D = \angle DA_1B = \frac{\pi}{3}$ ，则下列说法中正确的是



第11题图

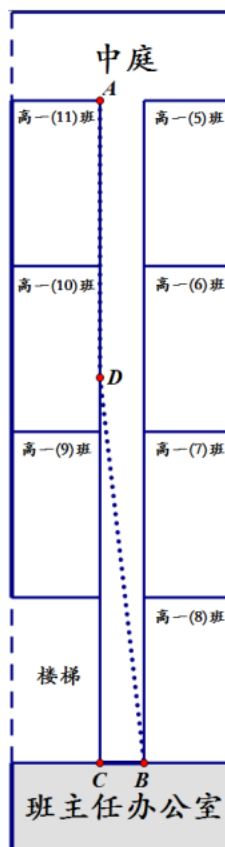
A. $\triangle BDC_1$ 为等边三角形

B. 直线 $A_1C \perp$ 平面 BDC_1

C. A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. 该平行六面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. 南京市第十三中学始建于 1955 年，正对校门的老教学楼可谓是其历史最悠久的“文物”，但因其内部年久失修而多发停电事故。为解决此类问题，学校决定在楼层的地面上铺设一条主电缆，首先保证二楼从 A 点到 B 点的正常输电。经测量发现，每间教室长 7.5 米，相对教室之间的走廊宽 2 米，如图所示。已知紧靠墙角的电缆铺设费用为 30 元/米，而暴露在走廊中间电缆有安全隐患，须置于地下，费用为 40 元/米。则下列有关铺设方案预算的估计中，正确的是（参考数据： $\sqrt{7} \approx 2.646$ ， $\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.378$ ）



A. 若沿折线 ACB 铺设，费用为 960 元

B. 若沿直线段 AB 铺设，费用消耗一定比沿折线 ACB 铺设高

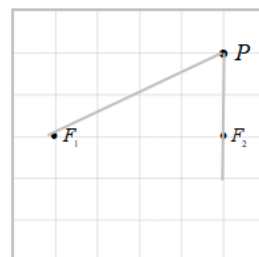
C. 在 AC 上取一点 D ，沿折线 ADB 铺设，为使费用消耗最低，应使 $CD = 2.268\text{m}$

D. 在 C 选项的条件下，最终费用的消耗将低于 AB 选项

三、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

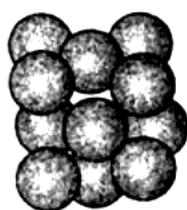
13. 已知 $\odot C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ ， $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ 。若 $\odot C$ 上仅存在一点 P 使 $PA \perp PB$ ，则 $|r|$ 的不同取值有_____个。

14. 在如图所示的“6 cm×6 cm”规格的方格纸中，已标有 F_1 、 F_2 两格点（格点指方格线相交的点），则共存在_____个格点 P ，使得 $|PF_1| - |PF_2| = 2$ cm。



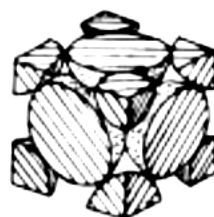
第14题图

15. 美丽的晶体构成了大千世界，金 Au、银 Ag 等贵金属在自然界中常以晶体形式存在，且堆积方式均为面心立方体堆积（如图甲所示）。图乙所示的立方体结构是一种“晶胞”，该晶胞的八个顶点处各有半径为 R 的 $\frac{1}{8}$ 球，在六个面上均有半径为 R 的半球，则图乙所示的晶胞边长为_____（用含 R 的代数式表示）。若定义空间利用率 $\delta = \frac{\text{晶胞内原子核总体积}}{\text{晶胞体积}}$ ，则 δ (图乙所示的晶胞) 为_____。



第 15 题

图甲



图乙

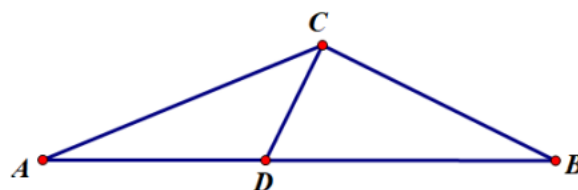
16. 若函数 $f(x) = kx^2 + \cos x$ 有 5 个极值点，则 k 的取值范围是_____。

四、解答题（共 6 小题，共 70 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (本小题共 8 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $|BC| = 4$ ， $\cos B = \frac{12}{13}$ ， D 在 $\overline{AB}$ 上，且 $CD \perp CB$

(1) 求 $\triangle BCD$ 的面积；

(2) 若 D 为 $\overline{AB}$ 的中点，求 $|AC|$ 。



18. (本小题共 10 分)在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$

(1) 若 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$, 求证: $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

19. (本小题共 12 分)在学习“用单摆测量重力加速度”的新课前, 高二 14 班的童同学本着强烈的求知欲与好奇心, 为探究摆长 L —周期 T 之间的关系, 提前做了实验:

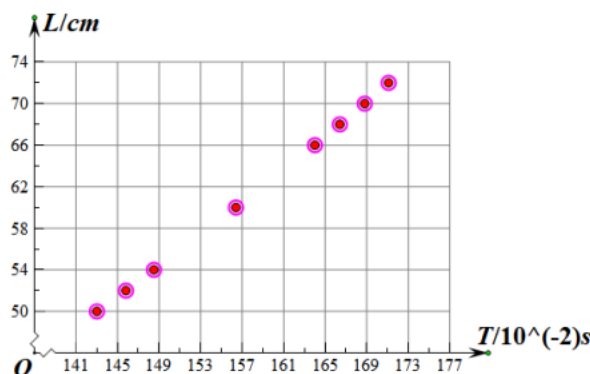
①将细线穿过球上的小孔做成一个单摆, 并测量摆线的长度 L

②将铁夹固定在铁架台上方, 铁架台放在桌边, 使铁夹伸到桌面以外, 使摆球自由下垂。

③把小球拉开一个小角度 ($<5^\circ$) 使其在竖直平面内摆动, 测量完成全振动 30 到 50 次所用的平均时间后, 求出周期 T

④整理数据, 并在坐标纸上画出 L — T 的散点图:

实验次数	1	2	3	4	5	6	7	8
L/cm	50	52	54	60	66	68	70	72
T/s	1.430	1.458	1.485	1.564	1.640	1.664	1.688	1.711



(1) 童同学认为这些点分布在“ $L=bT^2+a$ ”附近, 而同桌的韩同学则认为分布在“ $L=c\cdot 2^{dT}+e$ ”附近, 他们各自计算了样本的相关系数, 童同学的为 r_1 , 韩同学的为 r_2 , 且 $r_1>r_2$ 。请依此选择一个合适的拟合模型, 并说明理由。

(2) 在 (1) 的选择下，童同学为使二者的线性关系更明显，用 x 代替 T^2 对数据作出了如下处理：

实验次数	1	2	3	4	5	6	7	8
L/cm	50	52	54	60	66	68	70	72
$x=T^2/\text{s}^2$	2.045	2.216	2.205	2.446	2.690	2.769	2.849	2.928

(↓ 单位略)

$\sum_{i=1}^8 L_i$	$\sum_{i=1}^8 T_i$	$\sum_{i=1}^8 x_i$	$\sum_{i=1}^8 (T_i - \bar{T})(L_i - \bar{L})$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(L_i - \bar{L})$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$
61.5	1.580	2.507	6.730	21.413	0.850

试求 L 关于 T 的线性回归方程。(单位略去；结果保留两位小数)

附：线性回归方程 $y = \hat{b}x + \hat{a}$ 中， $\hat{b} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ ， $25.19 \times 2.507 = 63.15133$ ， $4\pi^2 \approx 39.48$

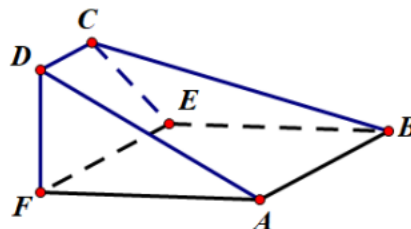
(3) 事后，童同学翻看了课本的后一课时，发现了真正的单摆周期公式 “ $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ ”，则该实验中，最终测出的重力加速度 g 为 _____ m/s^2 ；(结果保留两位小数)

(4) 联系 (2) 中求出的线性回归方程与实验的操作步骤，童同学作出的实验反思中正确的是_____。

- A. 实验步骤完全正确
- B. 实验步骤有些许误差，规范操作后的 g 测量结果更小
- C. 实验步骤有些许误差，但对 g 的测量无影响
- D. 可由实验结论推出所用钢球的半径为 1.65 cm，该钢球的尺寸选用较为合适

20. (本小题共 14 分)如图，五面体 $ABCDEF$ 中， $ABEF$ 为正方形， $|AF| = 2|FD|$ ， $\angle AFD = 90^\circ$ ，二面角 $D-AF-E$ 和 $C-BE-F$ 大小均为 $\frac{\pi}{3}$

(1) 求证：平面 $ABEF \perp EFDC$ ；

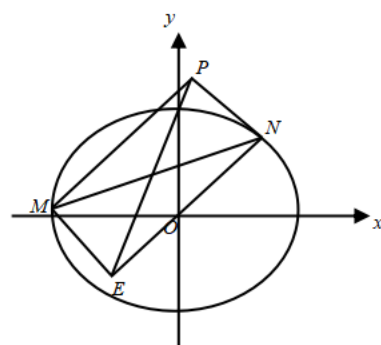


(2) 求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值。

21. (本小题共 13 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F_1 , 右焦点为 F_2 , 上顶点为 A , 且满足 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6, $\vec{AF_1} \cdot \vec{AF_2} = 2$ 。斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 交 C 于 M, N 两点, 另有定点 $E(-1, -1)$ 和平面内的一点 P

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若四边形 $ENPM$ 为平行四边形, 是否存在顶点 Q 使 $|PE|^2 - |PQ|^2$ 为定值? 若存在, 则求出 Q 点坐标和该定值; 若不存在, 说明理由。



22. (本小题共 13 分)已知函数 $f(x)=ax-x^{a-1}\cdot\ln x$, 回答下列问题:

(1) 求 $f(x)$ 在 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 解不等式: $x^2-x+\ln \frac{x+1}{x^2+1}>0$

题源:

1~4; 6~10; 12; 16; 19; 22	11; 14; 21	15; 17	5	20	13; 18
14-Wyt	8-Cmx	7-Yjf	2016 北京	2016 全国 I (理)	之前的周测

排版/绘图: 14-Wyt; 审卷: 8-Cmx