武汉市2021届高中毕业生三月质量检测

数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	B	C	A	D	B	ABD	BC	AB	BCD

填空题：

13. $\sqrt{3}$　　14. 2　　15. 18　　16. $(3+\sqrt{3})\pi$

解答题：

17.（10分）

（Ⅰ）由题意 $a_1+a_2=2a_3$，$\therefore a_1(1+q-2q^2)=0$，$\therefore q=-\frac{1}{2}$ 或1（舍）.

又$\because a_1+a_3=5$，$\therefore a_1(1+q^2)=5$，$\therefore a_1=4$.

$\therefore a_n=4\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$. ……………………………………………………5分

（Ⅱ）$S_n=\dfrac{4\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{8}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]$.

$\because S_k>\frac{23}{8}$，$\therefore \frac{8}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^k\right]>\frac{23}{8}$，$\therefore \frac{5}{64}<-(-\frac{1}{2})^k$.

显然，k 为奇数，即 $(\frac{1}{2})^k>\frac{5}{64}$.

解得 $k\leqslant 3$.所以满足条件的最大正整数 k 为3. ……………………………………10分

18.（12分）

（Ⅰ）由 $B=\frac{2\pi}{3}$，得 $A+C=\frac{\pi}{3}$，$\cos(A+C)=\cos A\cos C-\sin A\sin C$，即 $\frac{1}{2}=\cos A\cos C-\sin A\sin C$.

又$\because \cos A\cos C=\frac{2}{3}$，$\therefore \sin A\sin C=\frac{1}{6}$.

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$，$\therefore a=2\sqrt{2}\sin A$，$c=2\sqrt{2}\sin C$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\sin A\cdot 2\sqrt{2}\sin C\cdot\sin B=4\sin A\sin B\sin C=4\times\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………6分

（Ⅱ）假设 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$ 能成立.$\therefore a+c=ac$.

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$\therefore 6=a^2+c^2+ac$.

$\therefore (a+c)^2-ac=6$，$\therefore (ac)^2-ac-6=0$，$\therefore ac=3$ 或-2（舍），此时 $a+c=ac=3$.

不满足 $a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$ 不成立. ……………………………………………12分

19.(12分)

(Ⅰ)取 CD 中点 N，连 MN 和 BN，$\because AB \underline{\parallel} DN$，$\therefore$ 四边形 $ABND$ 为平行四边形，$\therefore BN // AD$.

又 $CD \perp$ 平面PAD，$AD \subset$ 平面PAD，$\therefore CD \perp AD$，$\because BN // AD$，$\therefore CD \perp BN$.

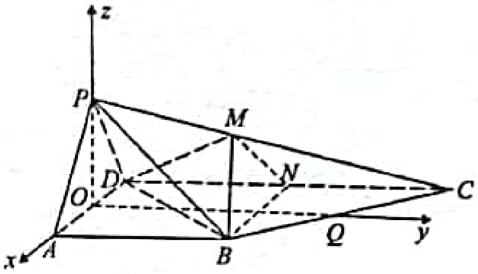
又 $\because CD \perp BM$，$BN \cap BM = B$，$BM \subset$ 平面BMN，$BN \subset$ 平面BMN.

$\therefore CD \perp$ 平面BMN.

又 $\because CD \perp$ 平面APD，$\therefore$ 平面$BMN //$ 平面PAD.

$\because BM \subset$ 平面BMN，$\therefore BM //$ 平面APD.……………………………………………………6分

(Ⅱ)取 AD 中点 O，作 $OQ // AB$ 交 BC 于 Q，



$\because PA = PD$，$\therefore PO \perp AD$，$CD \perp$ 平面PAD，$PO \subset$ 平面PAD.

$\therefore CD \perp PO$，又 $CD \cap AD = D$，$\therefore PO \perp$ 平面$ABCD$.

以 O 为坐标原点，OA 为 x 轴正方向，

OQ 为 y 轴正方向，OP 为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系.

$A(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(-1,2,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3})$. 设平面 BMD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$，

$\therefore \overrightarrow{PA} = (1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB} = (2,1,0)$. 由 $PA //$ 平面BMD.

$\begin{cases} \overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = x - \sqrt{3}z = 0 \\ \overrightarrow{DB} \cdot \vec{n} = 2x + y = 0 \end{cases}$，取 $x = \sqrt{3}$，$y = -2\sqrt{3}$，$z = 1$.

$\vec{n} = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1)$.

$\overrightarrow{PC} = (-1, 2, -\sqrt{3})$.

$\therefore \cos < \vec{n}, \overrightarrow{PC} > = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

$\therefore$ 直线 PC 和平面 BMD 所成角正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.……………………………………………12分

20.(12分)

(Ⅰ)解：该市电动自行车骑行人员平均年龄为

$25 \times 0.25 + 35 \times 0.35 + 45 \times 0.2 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.05 = 39$. ……………………………………3分

(Ⅱ)

年龄 \ 是否佩戴头盔	是	否
[20,40)	540	60
[40,70]	340	60

……………………………………7分

(Ⅲ) $K^2 = \dfrac{1000 \times (60 \times 540 - 60 \times 340)^2}{600 \times 400 \times 880 \times 120} = \dfrac{125}{22} \approx 5.682 < 6.635$.

故而没有99%的把握认为遵守佩戴安全头盔与年龄有关. ……………………………………12分

21.(12分)

(Ⅰ)由 $|BD| = \dfrac{4}{3}$，得 $a = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = 2$，故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，此时 $P(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3})$.

代入方程，$\dfrac{1}{9} + \dfrac{16}{9b^2} = 1$，解得 $b^2 = 2$，故 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. ……………………………………4分

(Ⅱ)设直线 PQ 方程为：$x=my+\frac{2}{3}$，与椭圆方程联立.

得 $(m^2+2)y^2+\frac{4m}{3}y-\frac{32}{9}=0$.

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-4m}{3(m^2+2)} \\ y_1y_2=\dfrac{-32}{9(m^2+2)} \end{cases}$.　①

此时直线 AP 方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，与 $x=t$ 联立.

得点 $M(t,\frac{(t+2)y_1}{x_1+2})$，同理，点 $N(t,\frac{(t+2)y_2}{x_2+2})$.

由 $MD\perp ND$，$k_{MD}\cdot k_{ND}=-1$.

即 $\dfrac{(t+2)y_1}{(t-\frac{2}{3})(x_1+2)}\cdot\dfrac{(t+2)y_2}{(t-\frac{2}{3})(x_2+2)}=-1$.

所以 $(t+2)^2y_1y_2+(t-\frac{2}{3})^2(my_1+\frac{8}{3})(my_2+\frac{8}{3})=0$.

即 $(t+2)^2y_1y_2+(t-\frac{2}{3})^2[m^2y_1y_2+\frac{8m}{3}(y_1+y_2)+\frac{64}{9}]=0$.

将①代入得：

$$\frac{-32(t+2)^2}{9(m^2+2)}+(t-\frac{2}{3})^2\left[\frac{-32m^2}{9(m^2+2)}-\frac{32m^2}{9(m^2+2)}+\frac{64}{9}\right]=0.$$

化简得：$-32(t+2)^2+(t-\frac{2}{3})^2[-32m^2-32m^2+64(m^2+2)]=0$.

即 $(t+2)^2-4(t-\frac{2}{3})^2=0$.

$t+2=\pm2(t-\frac{2}{3})$.

解得 $t=-\frac{2}{9}$或$t=\frac{10}{3}$. ……………………………………………………………………12分

22.(12分)

(Ⅰ)$a=1$ 时，$f(x)=(x-1)e^{x-1}-\ln x$.

$f'(x)=xe^{x-1}-\frac{1}{x}$.

设 $g(x)=f'(x)$，$\because g'(x)=(x+1)e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$.

$\therefore f'(x)$ 单调递增.

又 $f'(1)=0$，故 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1)=0$. ……………………………………………5分

(Ⅱ)方法一：

设 $h(a)=(x-1)e^{x-a}-\ln x-\ln a$.

$h'(a)=\dfrac{(1-x)e^x}{e^a}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{e^a}\left[(1-x)e^x-\dfrac{e^a}{a}\right]$.

设 $s(x)=(1-x)e^x, t(x)=\frac{e^x}{x}$,

$\because s'(x)=-xe^x<0$, $\therefore x>0$ 时, $s(x)$ 单调递减, $s(x)<s(0)=1$.

$\because t'(x)=\frac{x-1}{x^2}e^x$.

$\therefore 0<x<1$ 时, $t'(x)<0$, $t(x)$单调递减;

$x>1$ 时, $t'(x)>0$, $t(x)$ 单调递增,

$\therefore t(x)\geqslant t(1)=e$, 故 $a>0$, $x>0$ 时, $(1-x)e^x<1<e\leqslant\frac{e^a}{a}$.

即 $h'(a)<0$, $h(a)$ 单调递减.

则 $0<a\leqslant 1$时, $h(a)\geqslant h(1)=(x-1)e^{x-1}-\ln x$.

由(Ⅰ)知, $(x-1)e^{x-1}-\ln x\geqslant 0$.

故 $0<a\leqslant 1$ 时, $h(a)\geqslant 0$.

即 $(x-1)e^{x-a}-\ln x\geqslant\ln a$恒成立. ……………………………………………………12分

方法二:

设 $u(x)=\ln x-x+1(x>0)$.

$\therefore u'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$, $\therefore u(x)$在$(0,1]$上单调递增, $[1,+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore u(x)\leqslant u(1)=0$, $\therefore \ln x\leqslant x-1$.

设 $h(x)=(x-1)e^{x-a}-\ln x-\ln a(x>0)$, $0<a\leqslant 1$.

$\therefore h'(x)=x\cdot e^{x-a}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(x^2\cdot e^{x-a}-1)$.

令 $t(x)=x^2\cdot e^{x-a}-1$, $\therefore t'(x)=(x^2+2x)\cdot e^{x-a}>0$, $\therefore t(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $\because t(a)=a^2-1\leqslant 0$, $t(1)=e^{1-a}-1\geqslant 0$, $\therefore \exists$唯一$x_0\in[a,1]$使$t(x_0)=0$, 即 $x_0^2\cdot e^{x_0-a}=1$.

$\therefore 2\ln x_0+x_0-a=0$, 即 $a=2\ln x_0+x_0$ 令 $p(x)=2\ln x+x$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$a=1$ 时, $x_0=1$; $a=0$ 时, $2\ln x_0+x_0=0$, 又 $2\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}<0$, $\therefore x_0>\frac{1}{2}$.

即 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

$\because h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减, $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

$$\begin{aligned}\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)&=(x_0-1)e^{x_0-a}-\ln x_0-\ln a=\frac{x_0-1}{x_0^2}-\ln x_0-\ln(2\ln x_0+x_0)\\&\geqslant\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0-(2\ln x_0+x_0-1)=\frac{x_0-1}{x_0^2}-3\ln x_0-(x_0-1)\\&\geqslant\frac{x_0-1}{x_0^2}-3(x_0-1)-(x_0-1)=\frac{(x_0-1)}{x_0^2}(1-4x_0^2).\end{aligned}$$

$\because x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, $\therefore h(x_0)\geqslant 0$.

即 $0<a\leqslant 1$时, $f(x)\geqslant\ln a$恒成立. ……………………………………………………12分