

华中师范大学第一附属中学 2021 年高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	B	C	D	C	D	BCD	AD	ABD	ACD

1. 【答案】D

【解析】由已知 $(\complement_{\mathbb{R}} N) \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} M)$ 得: $M \subseteq N$, 得答案为 D.

2. 【答案】B

【解析】点 $(x_0, 2)$ 到焦点 F 的距离等于到准线 $y = -\frac{1}{4m}$ 的距离, 则 $2 + \frac{1}{4m} = \frac{17}{8}$, 解得 $m = 2$.

3. 【答案】C

【解析】 $P = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_5^3 C_5^3} = \frac{3}{10}$.

4. 【答案】B

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 若 $q = 1$, 则 $\frac{S_{2m}}{S_m} = 2$, 与题中条件矛盾, 故 $q \neq 1$.

$\therefore \frac{S_{2m}}{S_m} = \frac{a_1(1-q^{2m})}{a_1(1-q^m)} = q^m + 1 = 9, \therefore q^m = 8. \therefore \frac{a_{2m}}{a_m} = \frac{a_1 q^{2m-1}}{a_1 q^{m-1}} = q^m = 8 = \frac{5m+1}{m-1}, \therefore m = 3, \therefore q^3 = 8, \therefore q = 2$. 故

选 B.

5. 【答案】

【解析】设 A_1, A_2 两处的海拔高度分别为 h_1, h_2 , 则 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} = \frac{p_0 e^{-h_1}}{p_0 e^{-h_2}} = e^{k(h_2 - h_1)}$,

$\therefore h_2 - h_1 = \frac{-\ln 2}{0.000126} \approx \frac{-0.693}{0.000126} = -5500\text{m}$.

6. 【答案】D

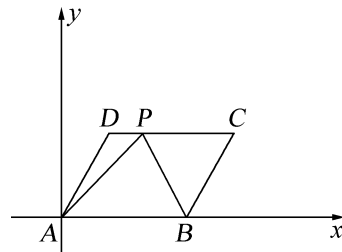
【解析】方法一: 由题知 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DP} =$

$|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 16 = 10$. 故选 D.

方法二: 如图, 以 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 过点 A 且垂直于 AB 的直线为 y 轴, 建立直角坐标系, 则 $A(0, 0), B(4, 0), D(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \therefore \overrightarrow{CP} = 3$

$\overrightarrow{PD}, \therefore |\overrightarrow{DP}| = 1, \therefore P(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \therefore \overrightarrow{AP} = (\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AB} = (4, 0), \therefore \overrightarrow{AP} \cdot$

$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2} \times 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 0 = 10$. 故选 D.



7. 【答案】C

【解析】 $\because f(x) = \log_3(9^x + 1) - x = \log_3(3^x + 3^{-x}), \therefore f(x)$ 为偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

则 $b = f(-e^{-\frac{9}{10}}) = f(e^{-\frac{9}{10}})$, $\therefore e^x - x - 1 \geq 0$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号), $\therefore e^x > x + 1 (x \neq 0)$,
 故 $e^{-\frac{9}{10}} > -\frac{9}{10} + 1 = \frac{1}{10}$, 即 $b > a$; $\therefore \ln x - x + 1 \leq 0$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号),
 $\therefore \ln x < x - 1 (x \neq 1)$, $\therefore \ln \frac{11}{10} < \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10}$, $\therefore a > c$. 综上 $b > a > c$. 故选 C.

8. 【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M , 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0 \end{cases}$, $\therefore \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$, 则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$, $\therefore k_{OM} = \frac{3b^2}{a^2}$, 设直线 AB 的倾斜角为 θ , $\therefore |AF_2| = |BF_2|$,
 $\therefore AB \perp MF_2$, $\therefore |OM| = |OF_1| = |OF_2|$, 则 OM 的斜率为 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$,
 $\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 故选 D.

9. 【答案】BCD

【解析】由虚部概念知 A 错误; 由 $\cos 140^\circ < 0, \sin 140^\circ > 0$, B 正确; 由 $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, C 正确;
 $\therefore z^2 = \cos^2 140^\circ - \sin^2 140^\circ + 2i \sin 140^\circ \cos 140^\circ = \cos 280^\circ + i \sin 280^\circ$,
 $\therefore z^3 = z^2 \cdot z = \cos 420^\circ + i \sin 420^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, D 正确.

10. 【答案】AD

【解析】对 A, 因为中位数为 2, 极差为 5, 故最大值不会大于 $2 + 5 = 7$. 故 A 正确;
 对 B, 失分数据分别为 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 8, 则满足平均数为 2, 众数为 2, 但不满足每名同学失分都不超过 7 分, 故 B 错误;
 对 C, 失分数据分别为 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 9, 则满足平均数为 1, 方差大于 0, 但不满足每名同学失分都不超过 7 分, 故 C 错误;
 对 D, 利用反证法, 假设有一同学失分超过 7 分, 则方差大于 $\frac{1}{10} \times (8 - 2)^2 = 3.6 > 3$. 与题设矛盾, 故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11. 【答案】ABD

【解析】若 F 为 AD 中点, 连接 BF 交 AE 于点 H , 则 $AE \perp$ 面 MBF , 又 $AE \subset$ 面 MAE , 所以平面 $AEM \perp$ 平面 MBF , A 正确;

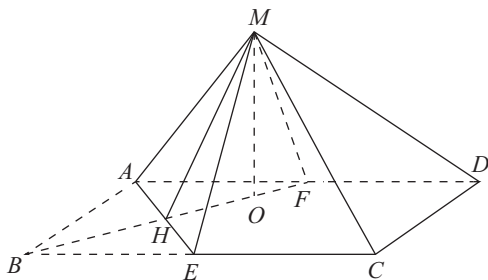
取 AM 中点 P , 则 $PQ \parallel \frac{1}{2}AD$, 又 $CE \parallel \frac{1}{2}AD$, $\therefore PQ \parallel CE$,

$\therefore CQ \parallel EP$, B 正确;

过 M 作 $MO \perp$ 平面 $AECD$, 则 O 在 BF 上, 所以平面 AEM 与

平面 $AECD$ 所成锐二面角为 $\angle MHB$ (或其补角), $\therefore \sin \alpha = \frac{MO}{MH}$, $\sin \beta = \frac{MO}{ME} = \frac{MO}{\sqrt{2}MH}$, $\therefore \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$, C 错误;

若 $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$, 又 $\cos \alpha = \frac{OH}{MH}$, $\cos \beta = \frac{OE}{ME} = \frac{OE}{\sqrt{2}MH}$, 则 $OE = 2OH$, D 正确



12. 【答案】ACD

【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，A 正确；

又 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin 2x-1 \neq f(x)$ ，B 错误；

由 A 知只需考虑 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值。

①当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ，则 $t \in [1, \sqrt{2}]$ ， $f(x) = -t^2 + t = u(t)$ ，易知 $u(t)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减，所以， $f(x)$ 的最大值为 $u(1)=0$ ，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$ 。

②当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时，令 $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ，则 $t \in [1, \sqrt{2}]$ ， $f(x) = t^2 + t - 2 = v(t)$ ，易知 $v(t)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递增，所以， $f(x)$ 的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ ，最小值为 $v(1)=0$ 。

综合可知：函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ ，最小值为 $\sqrt{2}-2$ ，C 正确；

因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$ 。

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$ ，解得 $t=0$ 或 1 ，

$t=\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})=0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上无解， $t=\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})=1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$ 。

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$ ，解得 $t=-2$ 或 1 。

$t=\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})=-2$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上无解， $t=\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})=1$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上也无解。

综合可知：函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\pi$ 。

又因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，所以，若 $n \in \mathbf{N}^*$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, n\pi]$ 上恰有 $2n$ 个零点。

又已知函数 $f(x)$ 在 $(0, M\pi)$ 上恰有 2021 个零点，所以 $\frac{2021}{2} < M \leq 1011$ ，D 正确。

13. 【答案】5

【解析】由已知 $n=16$ ，展开式通项 $T_{r+1} = C_n^r (\sqrt{x})^{n-r} (\frac{1}{2\sqrt{x}})^r = C_n^r (\frac{1}{2})^r x^{\frac{n}{2}-\frac{3r}{4}}$ ，则 $r=0, 4, 8, 12, 16$ 共 5 项。

14. 【答案】 $(x-1)^3$ (答案不唯一)

15. 【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处 (即 AB 中点)，设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d ，则由 $R^2 = d^2 + \frac{1}{4}AB^2 = d^2 + 5 \geq 5$ 得，外接球半径最小值为 $\sqrt{5}$ ，当 $PO \perp$ 面 $ABCD$ 时，高最大为 $\sqrt{5}$ 。

16. 【答案】253； $\begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

【解析】 $a_{505} = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{505^2}{1009}$ ， $b_{505} = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \dots + \frac{504^2}{1009} + \frac{505^2}{1011}$ ，

$\therefore a_{505} - b_{505} = 1 + \frac{2^2-1^2}{3} + \frac{3^2-2^2}{5} + \dots + \frac{505^2-504^2}{1009} - \frac{505^2}{1011} = 505 - \frac{505^2}{1011} = \frac{505 \times 506}{505+506}$

$\therefore \frac{2}{506} < \frac{1}{a_{505} - b_{505}} = \frac{1}{505} + \frac{1}{506} < \frac{2}{505}$

$\therefore 252.5 < a_{505} - b_{505} < 253$

$\therefore c_{505} = 253$ 。

$$a_n - b_n = n - \frac{n^2}{2n+1} = \frac{n^2+n}{2n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n - b_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \in \left(\frac{2}{n+1}, \frac{2}{n}\right)$$

$$\therefore \frac{n}{2} < a_n - b_n < \frac{n+1}{2}$$

若 $n=2k (k \in \mathbf{N}^*)$, 则 $c_n = k = \frac{n}{2}$,

若 $n=2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$, 则 $c_n = k = \frac{n+1}{2}$,

$$\therefore c_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

17. 【解析】

$$(1) \therefore a_n - 2n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + n - 1 = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - 2n + 2) (n \geq 2), \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1} (n \geq 2), \text{ 又 } b_1 = a_1 - 2 = -\frac{1}{2} \neq 0, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

则数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = b_n + 2n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2n, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore S_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + n(n+1) = \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] + n(n+1). \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$(2) \therefore b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1} (n \geq 2), b_1 = a - 2,$$

若 $a=2$, 则 $b_n=0$, $\therefore a_n=2n$, $\therefore a_{n+1}-a_n=2$, 此时数列 $\{a_n\}$ 为等差数列; $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

若 $a \neq 2$, 则数列 $\{b_n\}$ 为以 $a-2$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, $\therefore a_1=a, a_2=-\frac{1}{2}a+5, a_3=\frac{1}{4}a+\frac{11}{2}$,

$\therefore a_1+a_3 \neq 2a_2$, 此时数列 $\{a_n\}$ 不可能为等差数列. $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

综上, 存在实数 $a=2$, 使数列 $\{a_n\}$ 为等差数列. $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

18. 【解析】

$$(1) \text{ 连接 } AC, AB=BC=3, \angle ABC=60^\circ, \therefore AC=3 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \angle ADC=120^\circ, \text{ 在 } \triangle ACD \text{ 中由余弦定理, } \cos 120^\circ = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}, \text{ 即 } -\frac{1}{2} = \frac{AD^2 - 6}{2\sqrt{3}AD}, \therefore AD = \sqrt{3}$$

$$\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 的外接圆半径 } R = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\therefore \triangle OAD \text{ 为正三角形, } \angle AOD = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle ABD \text{ 所对的圆弧 } \widehat{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ACD \text{ 中, 由余弦定理 } \cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}$$

$$\text{即 } AD^2 + CD^2 + AD \cdot CD = 9, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$P=C_2^1P_1(1-P_1)C_2^2(P_2)^2+C_2^2(P_1)^2C_2^1P_2(1-P_2)+C_2^2(P_1)^2C_2^2(P_2)^2 \\ =2P_1P_2(P_1+P_2)-3(P_1P_2)^2, \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{又} \because P_1+P_2=1, 0 \leq P_2 \leq 1, \text{则 } P_1P_2=(1-P_2)P_2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore P=2P_1P_2-3(P_1P_2)^2=-3\left(P_1P_2-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}, \text{且 } 0 \leq P_1P_2 \leq \frac{1}{4}, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\therefore P_{\max}=\frac{5}{16}, \text{此时 } P_1P_2=\frac{1}{4}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

设 A、B 所在的小组在 n 轮比赛中的积分为 ξ , 则 $\xi \sim B(n, p)$,

$$\therefore E\xi=\frac{5}{16}n \geq 5, \therefore n \geq 16, \text{所以理论上至少要进行 16 轮比赛.} \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

21.【解析】

$$(1)f(x) \text{ 的定义域为 } (-1, +\infty), f'(x)=\frac{1}{x+1}+2mx, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}+2m=\frac{13}{2}, \therefore m=3, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{x+1}+6x=\frac{6x^2+6x+1}{x+1},$$

$$\text{令 } f'(x)=0, \text{得 } x_1=\frac{-3-\sqrt{3}}{6} > -1, x_2=\frac{-3+\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{得 } -1 < x < x_1 \text{ 或 } x > x_2; \text{令 } f'(x) < 0, \text{得 } x_1 < x < x_2,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减

$$\text{即 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left(-1, \frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right) \text{ 和 } \left(\frac{-3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right),$$

$$\text{单调递减区间为 } \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{6}, \frac{-3+\sqrt{3}}{6}\right). \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由题意知 } g(x)=\ln(x+1)+mx^2-\sin x, g(0)=0, g'(x)=\frac{1}{1+x}+2mx-\cos x, g'(0)=0,$$

$$\text{令 } h(x)=g'(x), \text{则 } h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x, h'(0)=2m-1 \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

若 $0 < m < \frac{1}{2}$, 因为当 $x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 单调递增, 所以 $h'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

$$\text{又因为 } h'(0)=2m-1 < 0, h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2m+1-\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2} > 0,$$

因此存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h'(x_0)=0$,

所以当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $h'(x) < h'(x_0)=0, g'(x)=h(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 上单调递减, 又 $g'(0)=h(0)=0$,

所以当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 符合题意 (10 分)

$$\text{若 } m \geq \frac{1}{2}, \text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x \geq 1-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, $g'(x) > g'(0)=0, g(x)$ 在 $0, \frac{\pi}{2}$ 上单调递增, 因此 $x=0$ 不可能是 $g(x)$ 的极大值点. $\dots\dots\dots (11 \text{ 分})$

综上, 当 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点时, m 的取值范围为 $0, \frac{1}{2}$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

22.【解析】

(1) 当 P 为椭圆 E 的上顶点时, $|PF_1| = a, \therefore |MF_2| = |PM| = |MF_1| + a,$

又因为 $|MF_1| + |MF_2| = 2a, \therefore |MF_1| = \frac{a}{2}, |PM| = |MF_2| = \frac{3a}{2}$

$$\text{所以 } \cos \angle MPN = \frac{PM^2 + PF_2^2 - MF_2^2}{2PM \cdot PF_2} = \frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot a} = \frac{1}{3}$$

$$\text{所以 } \cos \angle MPN = 1 - 2\sin^2 \angle MPO = \frac{1}{3}, \therefore \sin \angle MPO = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(2) 方法一: 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), PF_1 = \lambda F_1M, PF_2 = \mu \overrightarrow{F_2N}, (\lambda, \mu > 0)$

$$\therefore (-c - x_0, -y_0) = \lambda(x_1 + c, y_1), (c - x_0, -y_0) = \mu(x_2 - c, y_2),$$

$$\therefore x_1 = -\left(\frac{x_0 + c}{\lambda} + c\right), y_1 = -\frac{y_0}{\lambda},$$

$$\text{又 } \because \text{点 } P \text{ 在椭圆上, 则 } \frac{\left(\frac{x_0 + c}{\lambda} + c\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) + \frac{2c(1+\lambda)x_0 + c^2(1+\lambda)^2}{a^2} = \lambda^2, \text{ 又 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore 2c(1+\lambda)x_0 + c^2(1+\lambda)^2 = (\lambda^2 - 1)a^2 = 3c^2(\lambda^2 - 1),$$

$$\therefore \lambda = \frac{x_0 + 2c}{c}, \text{ 同理 } \mu = \frac{x_0 - 2c}{-c} = \frac{2c - x_0}{c} \text{ (用“} -c \text{”代替“} c \text{”)},$$

$$\therefore \lambda + \mu = 4, \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}} = \frac{|PF_1| \cdot |PF_2|}{|PM| \cdot |PN|} = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)} = \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5} = \frac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}}$$

$$\text{又 } \lambda + \mu \geq 2\sqrt{\lambda\mu}, \therefore \lambda\mu \leq 4, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}} \text{ 的最大值为 } \frac{4}{9}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

方法二: 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \overrightarrow{PF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1M}, \overrightarrow{PF_2} = \mu \overrightarrow{F_2N},$

$$\therefore \begin{cases} x_0 + \lambda x_1 = -c(1+\lambda) \\ y_0 + \lambda y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_0 + \mu x_2 = c(1+\mu) \\ y_0 + \mu y_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x_0^2 + 3y_0^2 = 3b^2 \\ 2x_1^2 + 3y_1^2 = 3b^2 \end{cases}, \text{ 得 } 2x_0^2 + 3y_0^2 - \lambda^2(2x_1^2 + 3y_1^2) = 3b^2(1 - \lambda^2),$$

$$\text{即 } 2(x_0 + \lambda x_1)(x_0 - \lambda x_1) + 3(y_0 + \lambda y_1)(y_0 - \lambda y_1) = 3b^2(1 - \lambda^2),$$

$$\therefore 2(-c - \lambda c)(x_0 - \lambda x_1) = 3b^2(1 - \lambda^2), \text{ 即 } x_0 - \lambda x_1 = \frac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda - 1), \text{ 同理 } x_0 - \lambda x_2 = \frac{3b}{\sqrt{2}}(1 - \mu),$$

$$\therefore \lambda x_1 - \mu x_2 = \frac{3b}{\sqrt{2}}(1 - \mu) + \frac{3b}{\sqrt{2}}(1 - \lambda) = 3c(2 - \lambda - \mu),$$

$$\text{又 } \because \lambda x_1 - \mu x_2 = -c(1 + \lambda) - c(1 + \mu) = c(-2 - \lambda - \mu),$$

$$\therefore c(-2 - \lambda - \mu) = 3c(2 - \lambda - \mu), \therefore \lambda + \mu = 4, \text{ 以下同解法一}$$