

数列

一、选择题

1. (2019·山东任城·济宁一中高三月考) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3=5$, $S_4=24$, 则 $a_9=$ ()

- A. -5 B. -7 C. -9 D. -11

【答案】B

【解析】数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\because a_3=5, S_4=24,$$

$$\therefore a_1+2d=5, 4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=24,$$

$$\text{联立解得 } a_1=9, d=-2,$$

$$\text{则 } a_9=9-2\times 8=-7.$$

2. (2020·南岗·黑龙江实验中学高三三模(理)) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列, 若 $a_1=1$, 则 $s_4=$ ()

- A. 7 B. 8 C. 15 D. 16

【答案】C

【解析】由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $4a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列, 所以 $4a_2=4a_1+a_3$, 即 $4a_1q=4a_1+a_1q^2$,

$$\text{因为 } a_1 \neq 0, \text{ 所以 } 4q=4+q^2, \text{ 解得: } q=2, \text{ 根据等比数列前 } n \text{ 项和公式 } S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{1-2^4}{1-2}=15.$$

3. (2020·宁夏惠农·石嘴山市第一中学高三其他(文)) 我国古代数学典籍《九章算术》第七章“盈不足”章中有一道“两鼠穿墙”问题: 有厚墙5尺, 两只老鼠从墙的两边相对分别打洞穿墙, 大老鼠第一天进一尺, 以后每天加倍; 小老鼠第一天也进一尺, 以后每天减半, 问两鼠在第几天相遇? ()

- A. 第2天 B. 第3天 C. 第4天 D. 第5天

【答案】B

【解析】第一天共挖 $1+1=2$ ，前二天共挖 $2+2+0.5=4.5$ ，故前3天挖通，故两鼠相遇在第3天.

4. (2020·广西七星·桂林十八中高三月考(理)) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 - 2a_1 + a_6 = 14$ ，则 $S_9 =$ ()

A. 7 B. 10 C. 63 D. 18

【答案】C

【解析】等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d

$$\text{所以 } S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = 3a_1 + 3d, \quad a_6 = a_1 + 5d,$$

$$\text{所以 } 3a_1 + 3d - 2a_1 + a_1 + 5d = 2a_1 + 8d = 14,$$

$$\text{所以 } a_1 + 4d = 7, \text{ 即 } a_5 = 7,$$

$$\text{所以 } S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \times 9}{2} = 9a_5 = 63.$$

5. (2019·安徽省太和中学高三月考(理)) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -2$ ，公差 $d = \frac{3}{2}$ ，则 a_2 与 a_6 的等差中项是 ()

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{11}{2}$ D. 6

【答案】A

【解析】 a_2 与 a_6 的等差中项是 $a_4 = -2 + 3 \times \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

6. (2020·黑龙江让胡路·大庆一中高一期末) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_2 = 2, a_5 = \frac{1}{4}$ ，则公比 $q =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】由等比数列的性质可得： $a_5 = a_2 q^3$ ，即： $\frac{1}{4} = 2 \times q^3$ ，解得： $q = \frac{1}{2}$ 。

7. (2019·全国高三专题练习) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_8 < S_{10} < S_9$ ，则满足 $S_n > 0$ 的正整数 n 的最大值为 ()

A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

【答案】C

【解析】由 $S_8 < S_{10} < S_9$ 得， $a_9 > 0$ ， $a_{10} < 0$ ， $a_9 + a_{10} > 0$ ，所以公差大于零。

$$\text{又 } S_{17} = \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = 17a_9 > 0, \quad S_{19} = \frac{19(a_1 + a_{19})}{2} = 19a_{10} < 0,$$

$$S_{18} = \frac{18(a_1 + a_{18})}{2} = 9(a_9 + a_{10}) > 0,$$

8. (2020·勃利县高级中学高一期末) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$ ，则 $\frac{S_9}{S_5} = ()$

A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

$$\text{【解析】} \frac{S_9}{S_5} = \frac{\frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2}}{\frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{5} = 1, \text{ 故选 A.}$$

9. (2019·吉林长春·东北师大附中高三月考(理)) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_6 - 2S_3 = 2$ ，则 $a_7 + a_8 + a_9$ 的最小值为 ()

A. 9 B. 8 C. 6 D. 4

【答案】B

【解析】 $\{a_n\}$ 是等比数列， $\therefore S_6 - 2S_3 = 2$ ，即 $S_6 - S_3 = S_3 + 2$ ，

$\therefore S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 也是等比数列，且 $S_9 - S_6 = a_7 + a_8 + a_9$ ，

$$\therefore (S_6 - S_3)^2 = S_3 \cdot (S_9 - S_6),$$

$$\text{可得：} S_9 - S_6 = \frac{(S_3 + 2)^2}{S_3} = \frac{S_3^2 + 4S_3 + 4}{S_3} = S_3 + \frac{4}{S_3} + 4$$

$$\geq 2\sqrt{S_3 \cdot \frac{4}{S_3}} + 4 = 8, \text{ 当且仅当 } S_3 = 2 \text{ 时取等号,}$$

$\therefore a_7 + a_8 + a_9$ 的最小值为 8.

10. (2020·安徽屯溪一中高一期中) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1 > 0$ ， $a_{2020} + a_{2021} > 0$ ， $a_{2020} \cdot a_{2021} < 0$ ，

则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是 ()

A. 4040

B. 4041

C. 4042

D. 4043

【答案】A

【解析】 $\because a_{2020} \cdot a_{2021} < 0$ ， $\therefore a_{2020}$ 和 a_{2021} 异号，

又数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1 > 0$ ， $\therefore \{a_n\}$ 是递减的数列， $a_{2020} > 0, a_{2021} < 0$ ，

$$a_{2020} + a_{2021} > 0, \therefore S_{4040} = \frac{4040(a_1 + a_{4040})}{2} = 2020(a_{2020} + a_{2021}) > 0,$$

$$S_{4041} = \frac{4041(a_1 + a_{4041})}{2} = 4041a_{2021} < 0,$$

$\therefore$ 满足 $S_n > 0$ 的最大自然数 n 为 4040.

11. (2020·安徽屯溪一中高一期中) 已知 $a_n = \frac{n - \sqrt{79}}{n - \sqrt{80}}$ ，($n \in \mathbf{N}_+$)，则在数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中最小项

和最大项分别是 ()

A. a_1, a_{50} B. a_1, a_8 C. a_8, a_9 D. a_9, a_{50}

【答案】C

【解析】因为 $y = \frac{x - \sqrt{79}}{x - \sqrt{80}} = 1 + \frac{\sqrt{80} - \sqrt{79}}{x - \sqrt{80}}$ 在 $(-\infty, \sqrt{80})$ 上单调减，在 $(\sqrt{80}, +\infty)$ 单调减，

所以当 $x \in (-\infty, \sqrt{80})$ 时 $y \in (-\infty, 1)$ ，此时 $a_n \in [a_8, a_1] \subset (-\infty, 1)$ ，当 $x \in (\sqrt{80}, +\infty)$ 时 $y \in (1, +\infty)$ ，此时

$a_n \in [a_{50}, a_9] \subset (1, +\infty)$ ，因此数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中最小项和最大项分别为 a_8, a_9 ，选 C.

12. (2020·安徽蚌埠·高一期末) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ．若

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n-1}{n+1}, \text{ 则 } \frac{a_5}{b_5} = (\quad)$$

A. $\frac{19}{11}$ B. $\frac{17}{10}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{5}$

【答案】B

【解析】解：∵ S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，∴ $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9 \times 2a_5}{2} = 9a_5$ ，即 $a_5 = \frac{S_9}{9}$ ，

∵ T_n 是等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，∴ $T_9 = \frac{9(b_1 + b_9)}{2} = \frac{9 \times 2b_5}{2} = 9b_5$ ，即 $b_5 = \frac{T_9}{9}$ ，

$$\therefore \frac{a_5}{b_5} = \frac{S_9}{T_9} = \frac{2 \times 9 - 1}{9 + 1} = \frac{17}{10},$$

13. (2020·贵州铜仁伟才学校高二期末(理)) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 1$

$a_n = \frac{S_n}{n} + 2(n-1) (n \in N^*)$ ，则数列 $\left\{ \frac{1}{S_n + 3n} \right\}$ 的前 10 项的和是 ()

A. 290

B. $\frac{9}{20}$ C. $\frac{5}{11}$ D. $\frac{10}{11}$

【答案】C

【解析】由 $a_n = \frac{S_n}{n} + 2(n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 得 $S_n = na_n - 2n(n-1)$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = na_n - (n-1)a_{n-1} - 4(n-1)$, 整理得 $a_n - a_{n-1} = 4$,

所以 $\{a_n\}$ 是公差为 4 的等差数列, 又 $a_1 = 1$,

所以 $a_n = 4n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 从而 $S_n + 3n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + 3n = 2n^2 + 2n = 2n(n+1)$,

所以 $\frac{1}{S_n + 3n} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

数列 $\left\{ \frac{1}{S_n + 3n} \right\}$ 的前 10 项的和 $S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{5}{11}$.

14. (2020·全国高三其他) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为等差数列, 其前 n 项和分别为 A_n , B_n , 且 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{n}{2n+1}$,

则使 $\frac{a_n}{b_n} \geq \lambda$ 恒成立的实数 λ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 2

【答案】B

【解析】由题意可得 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{a_1 + a_{2n-1}}{2}}{\frac{b_1 + b_{2n-1}}{2}} = \frac{\frac{a_1 + a_{2n-1}}{2} \cdot (2n-1)}{\frac{b_1 + b_{2n-1}}{2} \cdot (2n-1)}$

$$= \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}} = \frac{2n-1}{2(2n-1)+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(4n-1)}.$$

设 $f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(4n-1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$,

因为函数 $f(n)$ 是增函数,

所以当 $n=1$ 时, 函数 $f(n)$ 取最小值,

$$\text{所以 } f(n) \geq f(1) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故实数 } \lambda \text{ 的最大值为 } \frac{1}{3}.$$

15. (2020·河北枣强中学高一期中) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_2 + a_4 = 6, a_5 = 5$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n a_{n+1}$,

则 $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$ 等于 ()

A. $\frac{n}{n-1}$

B. $\frac{n-1}{n}$

C. $\frac{n+1}{n}$

D. $\frac{n}{n+1}$

【答案】D

【解析】已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 + a_4 = 6, a_5 = 5$,

$$\text{所以 } 2a_1 + 4d = 6, a_1 + 4d = 5,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 1,$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = n,$$

$$\text{所以 } b_n = n(n+1),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n},$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

16. (多选题) (2020·山东文登·高二期末) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_3 = 0$, $a_4 = 8$, 则 ()

- A. $S_n = 2n^2 - 6n$ B. $S_n = n^2 - 3n$ C. $a_n = 4n - 8$ D. $a_n = 2n$

【答案】AC

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则
$$\begin{cases} S_3 = 3a_1 + 3d = 0 \\ a_4 = a_1 + 3d = 8 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1 = -4 \\ d = 4 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + 4(n-1) = 4n - 8, \quad S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = -4n + 2n(n-1) = 2n^2 - 6n.$$

17. (多选题) (2019·山东薛城·枣庄八中高二期) 若数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$ 满足

$(a_n - a_{n-1} - 2)(a_n - 2a_{n-1}) = 0$, 下面选项中关于数列 $\{a_n\}$ 的命题正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 可以是等差数列 B. $\{a_n\}$ 可以是等比数列
C. $\{a_n\}$ 可以既是等差又是等比数列 D. $\{a_n\}$ 可以既不是等差又不是等比数列

【答案】ABD

【解析】解: 因为 $(a_n - a_{n-1} - 2)(a_n - 2a_{n-1}) = 0$,

所以 $a_n - a_{n-1} - 2 = 0$ 或 $a_n - 2a_{n-1} = 0$,

即: $a_n - a_{n-1} = 2$ 或 $a_n = 2a_{n-1}$

①当 $a_n \neq 0, a_{n-1} \neq 0$ 时, $\{a_n\}$ 是等差数列或是等比数列.

② $a_n = 0$ 或 $a_{n-1} = 0$ 时, $\{a_n\}$ 可以既不是等差又不是等比数列

18. (多选题) (2020·江苏盐城·高二期末) 设 d , S_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差与前 n 项和, 若 $S_{10} = S_{20}$,

则下列论断中正确的有 ()

A. 当 $n=15$ 时, S_n 取最大值

B. 当 $n=30$ 时, $S_n=0$

C. 当 $d>0$ 时, $a_{10}+a_{22}>0$

D. 当 $d<0$ 时, $|a_{10}|>|a_{22}|$

【答案】BC

【解析】因为 $S_{10}=S_{20}$, 所以 $10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20a_1+\frac{20\times 19}{2}d$, 解得 $a_1=-\frac{29}{2}d$.

对选项 A, 因为无法确定 a_1 和 d 的正负性,

所以无法确定 S_n 是否有最大值, 故 A 错误.

对选项 B, $S_{30}=30a_1+\frac{30\times 29}{2}d=30\times\left(-\frac{29}{2}d\right)+15\times 29d=0$,

故 B 正确.

对选项 C, $a_{10}+a_{22}=2a_{16}=2(a_1+15d)=2\left(-\frac{29}{2}d+15d\right)=d>0$,

故 C 正确.

对选项 D, $a_{10}=a_1+9d=-\frac{29}{2}d+\frac{18}{2}d=-\frac{11}{2}d$,

$a_{22}=a_1+21d=-\frac{29}{2}d+\frac{42}{2}d=\frac{13}{2}d$,

因为 $d<0$, 所以 $|a_{10}|=-\frac{11}{2}d$, $|a_{22}|=-\frac{13}{2}d$,

$|a_{10}|<|a_{22}|$, 故 D 错误.

19. (多选题) (2020·海南海口·高三其他) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_4=2a_2+a_3$, 若设其公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 则 ()

A. $q=2$

B. $a_n=2^n$

C. $S_{10}=2047$

D. $a_n+a_{n+1}<a_{n+2}$

【答案】ABD

【解析】由题意 $2q^3 = 4q + 2q^2$ ，得 $q^2 - q - 2 = 0$ ，解得 $q = 2$ （负值舍去），选项 A 正确；

$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ，选项 B 正确；

$S_n = \frac{2 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$ ，所以 $S_{10} = 2046$ ，选项 C 错误；

$a_n + a_{n+1} = 3a_n$ ，而 $a_{n+2} = 4a_n > 3a_n$ ，选项 D 正确。

20.（多选题）（2020·山东泰安·高三其他）大衍数列，来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论.主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理.数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和，是中国传统文化中隐藏着的世界数学史上第一道数列题.其前 10 项依次是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, ...，则下列说法正确的是（ ）

A. 此数列的第 20 项是 200

B. 此数列的第 19 项是 182

C. 此数列偶数项的通项公式为 $a_{2n} = 2n^2$ D. 此数列的前 n 项和为 $S_n = n \cdot (n-1)$

【答案】AC

【解析】观察此数列，偶数项通项公式为 $a_{2n} = 2n^2$ ，奇数项是后一项减去后一项的项数， $a_{2n-1} = a_{2n} - 2n$ ，由此可得 $a_{20} = 2 \times 10^2 = 200$ ，A 正确； $a_{19} = a_{20} - 20 = 180$ ，B 错误；C 正确； $S_n = n(n-1) = n^2 - n$ 是一个等差数列的前 n 项，而题中数列不是等差数列，不可能有 $S_n = n \cdot (n-1)$ ，D 错。

二、解答题

21.（2020·贵州铜仁伟才学校高一期末）等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_5 = 4a_3$ 。

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m = 63$, 求 m .

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设得 $a_n = q^{n-1}$.

由已知得 $q^4 = 4q^2$, 解得 $q = 0$ (舍去), $q = -2$ 或 $q = 2$.

故 $a_n = (-2)^{n-1}$ 或 $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 若 $a_n = (-2)^{n-1}$, 则 $S_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}$. 由 $S_m = 63$ 得 $(-2)^m = -188$, 此方程没有正整数解.

若 $a_n = 2^{n-1}$, 则 $S_n = 2^n - 1$. 由 $S_m = 63$ 得 $2^m = 64$, 解得 $m = 6$.

综上, $m = 6$.

22. (2020·河北路北·开滦第一中学高一期末) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足

$$a_1 = b_1 = 1, a_2 + a_4 = 10, b_3 = a_5.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d , 正项等比数列 $\{b_n\}$ 公比为 q ,

因为 $a_1 = b_1 = 1, a_2 + a_4 = 10, b_3 = a_5$,

所以 $1 + d + 1 + 3d = 10, q^2 = 1 + 4d \therefore d = 2, \because q > 0 \therefore q = 3$

因此 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1, b_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

23. (2020·安徽高二期末(理)) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2, 2S_n = (n+1)a_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{4}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解析】解: (1) 因为 $2S_n = (n+1)a_n (n \in \mathbb{N}^*)$,

所以 $2S_{n-1} = na_{n-1} (n \geq 2)$, 两式作差可得

$$2a_n = (n+1)a_n - na_{n-1} (n \geq 2),$$

整理得 $(n-1)a_n = na_{n-1} (n \geq 2)$, 则 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2)$,

$$\text{故 } a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} = 2n (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时, $a_1=2$ 满足上式, 故 $a_n = 2n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } b_n = \frac{4}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)} = \frac{4}{(2n+2)(2n+4)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\text{则 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4}.$$

24. (2020·黑龙江萨尔图·大庆实验中学高一期末) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n + 2n - 6$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n - 2\}$ 为等比数列;

(2) 若 $b_n = a_n \cdot \log_2(a_n - 2)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前项和为 T_n , 求 T_n .

【解析】(1) $S_n = 2a_n + 2n - 6$ ，则当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 2(n-1) - 6$ ，

两式相减得： $a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 2$ ，

$\therefore a_n = 2a_{n-1} - 2$ ，即： $a_n - 2 = 2(a_{n-1} - 2)$ ，

又 $n=1$ 时， $S_1 = a_1 = 2a_1 + 2 - 6$ ，解得： $a_1 = 4$ ， $\therefore a_1 - 2 = 2 \neq 0$ ， $a_n - 2 \neq 0$

$$\therefore \frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = 2，$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 得： $a_n - 2 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ， $\therefore a_n = 2^n + 2$ ，

又 $b_n = a_n \cdot \log_2(a_n - 2)$ ， $\therefore b_n = n(2^n + 2)$ ，

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n) + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ ，

设 $A_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$ ，

则 $2A_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$ ，

两式相减可得： $-A_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \times 2^{n+1}$ ，

$\therefore A_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ ，又 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，

$\therefore T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + n(n+1)$ 。

25. (2020·江苏南通·高三其他) 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列，且 $a_1 = 1$ ， a_4 ， a_6 ， a_9 成等比数

列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i b_i = (n-1)2^n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(3) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 且 $c_m (m \in \mathbf{N}^*)$ 为整数，求 m 的值.

【解析】(1) 因为 $a_1 = 1$, a_4 , a_6 , a_9 成等比数列，

$$\text{所以 } a_6^2 = a_4 \cdot a_9$$

$$\text{即 } (1+5d)^2 = (1+3d)(1+8d),$$

解得： $d = 1$ 或 $d = 0$ (舍去)

$$\text{所以 } a_n = 1 + n - 1 = n ,$$

$$(2) \text{ 因为 } \sum_{i=1}^n a_i b_i = (n-1)2^n + 1 ,$$

$$\text{所以 } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = (n-1) \cdot 2^n + 1 , \text{ ①}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} = (n-2) \cdot 2^{n-1} + 1 \quad (n \geq 2) \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{得: } a_n b_n = (n-1) \cdot 2^n - (n-2) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} \quad (n \geq 2) ,$$

$$\text{又 } a_n = n ,$$

$$\text{所以 } b_n = 2^{n-1} (n \geq 2) ,$$

当 $n=1$ 时, $a_1b_1=1$, 即 $b_1=1$, 也适合 $b_n=2^{n-1}$,

所以 $b_n=2^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$,

由 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$ 知数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列.

$$(3) \quad c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

当 $n=1$ 时, $c_1=1$, $n=2$ 时, $c_2=1$,

当 $n \geq 3$ 时, 由 $n < 2^{n-1}$ 知 $c_n < 1$, 不是整数,

所以 $c_m (m \in \mathbf{N}^*)$ 为整数则 $m=1$ 或 $m=2$.