

成都市 2018 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid \lg x < 1\}$, $B = \{x \mid x > 3\}$, 则 $A \cup B =$
(A) $(0, +\infty)$ (B) $(3, 10)$ (C) $(-\infty, +\infty)$ (D) $(3, +\infty)$
2. 已知 i 为虚数单位,则复数 $z = (1+i)(2-i)$ 的虚部为
(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1
3. 命题“ $\forall x > 0, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为
(A) $\exists x_0 \leq 0, x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ (B) $\forall x \leq 0, x^2 + x + 1 \leq 0$
(C) $\exists x_0 > 0, x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ (D) $\forall x > 0, x^2 + x + 1 \leq 0$
4. 袋子中有 5 个大小质地完全相同的球,其中 3 个红球和 2 个白球,从中不放回地依次随机摸出两个球,则摸出的两个球颜色相同的概率为
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$
5. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 的值为
(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB = AC$, D 为 BC 边中点,点 O 在直线 AD 上,且 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = 3$, 则 BC 边的长度为
(A) $\sqrt{6}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{6}$ (D) 6
7. 已知圆柱的两个底面的圆周在体积为 $\frac{32\pi}{3}$ 的球 O 的球面上,则该圆柱的侧面积的最大值为
(A) 4π (B) 8π (C) 12π (D) 16π
8. 已知 P 是曲线 $y = \sin x + \cos x (x \in [0, \frac{3\pi}{4}])$ 上的动点,点 Q 在直线 $x + y - 6 = 0$ 上运动,则当 $|PQ|$ 取最小值时,点 P 的横坐标为
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = n^2$, 记数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 $T_n, n \in \mathbb{N}^+$. 则使得 $T_n < \frac{20}{41}$ 成立的 n 的最大值为
(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20
10. 某工厂产生的废气经过过滤后排放,过滤过程中废气的污染物数量 $P(\text{mg/L})$ 与时间 $t(\text{h})$ 之间的关系为 $P = P_0 e^{-kt}$. 如果前 2 小时消除了 20% 的污染物,则污染物减少 50% 大约需要的时间为(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61$)
(A) 4h (B) 6h (C) 8h (D) 10h
11. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点, A 为抛物线上的动点,点 $B(-1, 0)$. 则当 $\frac{2|AB|}{2|AF|+1}$ 取最大值时, $|AB|$ 的值为
(A) 2 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{2}$
12. 已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长均为 $\sqrt{2}$, M, N 分别为棱 AD, BC 的中点, F 为棱 AB 上异于 A, B 的动点. 有下列结论:
① 线段 MN 的长度为 1;
② 若点 G 为线段 MN 上的动点,则无论点 F 与 G 如何运动,直线 FG 与直线 CD 都是异面直线;
③ $\angle MFN$ 的余弦值的取值范围为 $[0, \frac{\sqrt{5}}{5})$;
④ $\triangle FMN$ 周长的最小值为 $\sqrt{2} + 1$.
其中正确结论的个数为
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1, \\ 2^x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a) = 2$, 则 a 的值为_____.

14. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2, n \in \mathbb{N}^+$. 若 $a_3 = \frac{1}{9}, a_2 a_4 = 1$, 则 a_2 的值为_____.

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆与双曲线

在第一象限内的交点为 P , 直线 $P F_1$ 与双曲线的渐近线在第二象限内的交点为 Q . 若点 Q 恰好为线段 $P F_1$ 的中点, 则直线 $P F_1$ 的斜率的值为_____.

16. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$ 成立. 若 $a = f(\ln 2)$, $b = f(\log_2 0.03)$, $c = f(2^{0.7})$, 则 a, b, c 的大小关系为_____. (用符号“ $<$ ”连接)

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(\sqrt{2}b - a)\cos C = c\cos A$.

(I) 求角 C 的大小;

(II) 若 $a = \sqrt{2}$, $c(a\cos B - b\cos A) = b^2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

某种机械设备随着使用年限的增加, 它的使用功能逐渐减退, 使用价值逐年减少, 通常把它使用价值逐年减少的“量”换算成费用, 称之为“失效费”. 某种机械设备的使用年限 x (单位: 年) 与失效费 y (单位: 万元) 的统计数据如下表所示:

使用年限 x (单位: 年)	1	2	3	4	5	6	7
失效费 y (单位: 万元)	2.90	3.30	3.60	4.40	4.80	5.20	5.90

(I) 由上表数据可知, 可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 请用相关系数加以说明; (精确到 0.01)

(II) 求出 y 关于 x 的线性回归方程, 并估算该种机械设备使用 10 年的失效费.

$$\text{参考公式: 相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距最小二乘估计计算公式:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

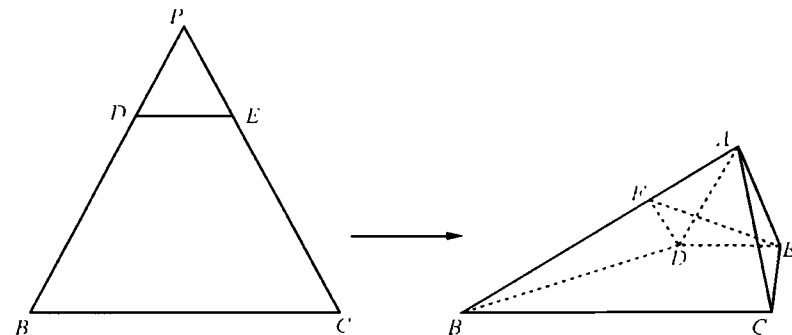
参考数据: $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 14.00$, $\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2 = 7.08$, $\sqrt{198.24} \approx 14.10$.

19. (本小题满分 12 分)

如图①, 在等腰三角形 PBC 中, $PB = PC = 3\sqrt{5}, BC = 6$, D, E 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EP}$. 将 $\triangle PDE$ 沿直线 DE 折起到 $\triangle ADE$ 的位置, 连接 AB, AC , 得到如图②所示的四棱锥 $A-BCED$, 点 F 满足 $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}$.

(I) 证明: $DF \parallel$ 平面 ACE ;

(II) 当 $AB = \sqrt{29}$ 时, 求平面 ACE 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值.



图①

图②

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 其长半轴长为 2.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设经过点 $B(-1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 D, E 两点, 点 E 关于 x 轴的对称点为 F , 直线 DF 与 x 轴相交于点 G , 求 $\triangle DEG$ 的面积 S 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} - (a-1)\ln x - 2$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $f(x)$ 存在唯一极值点, 且极值为 0, 求 a 的值;

(II) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[1, e^2]$ 上的零点个数.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 直线 l 的方程

为 $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C 和直线 l 的极坐标方程;

(II) 若点 $P(x, y)$ 在直线 l 上且 $y > 0$, 射线 OP 与曲线 C 相交于异于 O 点的点 Q , 求 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数 $f(x) = 3|x+1| + |2x-1|$ 的最小值为 m .

(I) 求 m 的值;

(II) 若 $a, b \in (0, +\infty)$, 证明: $(\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq m^2$.

成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测
数学（理科）答题卡

姓名

座位号

考籍号

贴条形码区
(正面朝上切勿贴出虚线框外)

考生禁填

缺考标记

缺考考生由监考员贴条形码，并用2B铅笔填涂上西的缺考标记。

注意事项

1. 答题前，考生务必先认真核对条形码上的姓名、考籍号和座位号，无误后将本人姓名、考籍号和座位号填写在相应位置，同时将背面左上角相应的座位号涂黑。
2. 选择题填涂时，必须使用2B铅笔按图示规范填涂；非选择题必须使用0.5毫米的黑色墨迹签字笔作答。
3. 必须在题目所指示的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持答题卡清洁、完整，严禁折叠，严禁使用涂改液和修正带。

第I卷

(须用2B铅笔填涂)

填涂样例 错误填涂 正确填涂

1 [A] [B] [C] [D]	6 [A] [B] [C] [D]	11 [A] [B] [C] [D]
2 [A] [B] [C] [D]	7 [A] [B] [C] [D]	12 [A] [B] [C] [D]
3 [A] [B] [C] [D]	8 [A] [B] [C] [D]	
4 [A] [B] [C] [D]	9 [A] [B] [C] [D]	
5 [A] [B] [C] [D]	10 [A] [B] [C] [D]	

第II卷 【必考题】

(须用0.5毫米的黑色字迹中性笔书写)

13. 14. 15. 16.

17.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

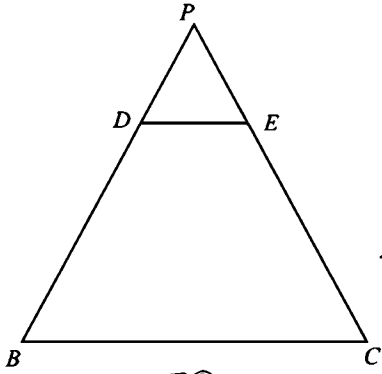
18.

19.

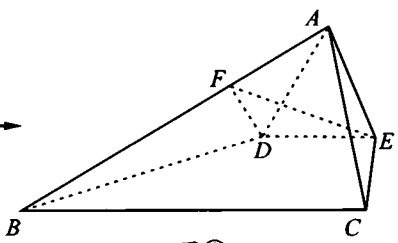
请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

19.



图①



图②

请在各题规定的黑色矩形区域内答题, 超出该区域的答案无效!

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

座位号 (请用2B铅笔填涂)	[01] [02] [03] [04] [05] [06] [07] [08] [09] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30]
-------------------	--

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

20.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

21.

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

第 II 卷【选考题】 以下为选考题，每个答题区只允许选答一题，答题前，请考生务必将所选题号用2B铅笔涂黑。

请考生从22、23二题中任选一题做答，并用2B铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分。

请在各题规定的黑色矩形区域内答题,超出该区域的答案无效!

成都市 2018 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A; 2. D; 3. C; 4. B; 5. D; 6. A; 7. B; 8. C; 9. C; 10. B; 11. C; 12. B.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. -1 ; 14. 3 ; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $b < c < a$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2} \sin B \cos C - \sin A \cos C = \sin C \cos A$2 分

$\therefore \sqrt{2} \sin B \cos C = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A + C)$3 分

$\because A + C = \pi - B$, $\therefore \sin(A + C) = \sin B$.

$\therefore \sqrt{2} \sin B \cos C = \sin B$4 分

又 $\because \sin B \neq 0$, $\therefore \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$5 分

$\because C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$6 分

(II)由已知及余弦定理,得 $ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2$8 分

化简,得 $a^2 = 2b^2$9 分

又 $\because a = \sqrt{2}$, $\therefore b = 1$10 分

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$12 分

18. 解:(I)由题意,知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$,1 分

$\bar{y} = \frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7} = 4.30$,2 分

$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = (1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2 = 28$3 分

$\therefore r = \frac{14.00}{\sqrt{28 \times 7.08}} = \frac{14.00}{\sqrt{198.24}} \approx \frac{14.00}{14.10} \approx 0.99$5 分

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.6 分

$$(II) \because \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{14}{28} = 0.5, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 4.3 - 0.5 \times 4 = 2.3. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 0.5x + 2.3. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

将 $x = 10$ 代入线性回归方程, 得 $\hat{y} = 0.5 \times 10 + 2.3 = 7.3$.

$\therefore$ 估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元. \dots\dots 12 \text{ 分}

19. 解: (I) 如图, 在棱 AC 上取点 G 满足 $CG = 2AG$, 连接 EG, FG . \dots\dots 1 \text{ 分}

$$\because \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}, \therefore FG \parallel BC \text{ 且 } FG = \frac{1}{3}BC.$$

$$\text{又由题意, 可得 } DE \parallel BC \text{ 且 } DE = \frac{1}{3}BC.$$

$$\therefore DE = FG \text{ 且 } DE \parallel FG.$$

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形.

$$\therefore DF \parallel EG.$$

又 $\because DF \not\subset$ 平面 ACE , $EG \subset$ 平面 ACE ,

$\therefore DF \parallel$ 平面 ACE . \dots\dots 5 \text{ 分}

(II) 如图, 分别取 DE, BC 的中点 M, N , 连接 AM, MN, BM .

由题意, 知 $MN \perp BC$, $AM = 2, MN = 4, BN = 3$.

$$\text{在 Rt } \triangle BMN \text{ 中, } BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 中, } \because AB = \sqrt{29}, \therefore AM^2 + BM^2 = 2^2 + 5^2 = 29 = AB^2.$$

$$\therefore AM \perp BM.$$

又 $AM \perp DE$, $BM \cap DE = M$, $BM, DE \subset$ 平面 $BCED$,

$\therefore AM \perp$ 平面 $BCED$. \dots\dots 7 \text{ 分}

以 M 为坐标原点, $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MA}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Mxyz$.

则 $M(0, 0, 0), A(0, 0, 2), B(4, -3, 0),$

$C(4, 3, 0), D(0, -1, 0), E(0, 1, 0),$

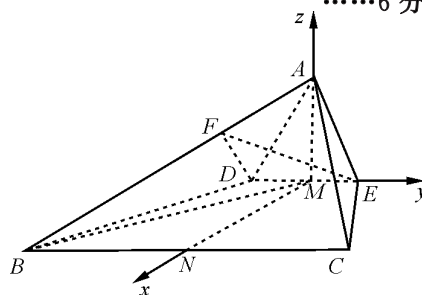
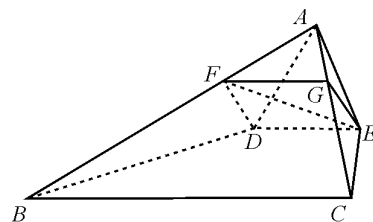
$$F\left(\frac{4}{3}, -1, \frac{4}{3}\right).$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = (4, 2, 0), \overrightarrow{EA} = (0, -1, 2), \overrightarrow{DE} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DF} = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 ACE 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 DEF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EA} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 4x_1 + 2y_1 = 0 \\ -y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } z_1 = 1, \text{ 得 } \mathbf{m} = (-1, 2, 1). \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2y_2 = 0 \\ \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}z_2 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } z_2 = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (-1, 0, 1). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$



$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{平面 } ACE \text{ 与平面 } DEF \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) 由已知, 得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. \dots\dots 1 分

$$\because \text{椭圆 } C \text{ 经过点 } A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}), \therefore \frac{1}{4} + \frac{3}{4b^2} = 1, \text{ 解得 } b^2 = 1. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由题意, 知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = ty - 1 (t \neq 0)$, $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (t^2 + 4)y^2 - 2ty - 3 = 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \Delta = 4t^2 + 12(t^2 + 4) = 16t^2 + 48 > 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{2t}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{t^2 + 4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because F \text{ 为点 } E \text{ 关于 } x \text{ 轴的对称点}, \therefore F(x_2, -y_2).$$

$$\therefore \text{直线 } DF \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

$$\text{即 } y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{t(y_1 - y_2)}(x - x_1). \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } y=0, \text{ 则 } x &= x_1 + \frac{-ty_1^2 + ty_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{(ty_1 - 1)(y_1 + y_2) - ty_1^2 + ty_1 y_2}{y_1 + y_2} \\ &= \frac{2ty_1 y_2 - (y_1 + y_2)}{y_1 + y_2} = 2t \cdot \left(-\frac{3}{2t}\right) - 1 = -4. \end{aligned}$$

$$\therefore G(-4, 0). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle DEG \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} |BG| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2 + 4}\right)^2 + \frac{12}{t^2 + 4}} = \frac{6\sqrt{t^2 + 3}}{t^2 + 4}. \end{aligned} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } m = \sqrt{t^2 + 3}, \text{ 则 } m \in (\sqrt{3}, +\infty).$$

$$\therefore S = \frac{6m}{m^2 + 1} = \frac{6}{m + \frac{1}{m}}.$$

$$\because m + \frac{1}{m} \in \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right), \therefore S \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\therefore \triangle DEG \text{ 的面积 } S \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (I) 由已知, 可得 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} - \frac{a-1}{x} = \frac{(x+1)(x-a)}{x^2} (x > 0)$1 分

①若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 与 $f(x)$ 存在极值点矛盾;2 分

②若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = a$.

$\therefore$ 当 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 存在唯一极小值点 $x = a$.

$\therefore f(a) = a + 1 - (a-1)\ln a - 2 = (a-1)(1 - \ln a) = 0$3 分

$\therefore a = 1$ 或 $a = e$4 分

(II) ①当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上单调递增.

$\therefore f(1) = a - 1 \leq 0, f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a$,

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a = e^2 + a(\frac{1}{e^2} - 2) > 0$;

(ii) 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a > 2\sqrt{a} - 2a = 2\sqrt{a}(1 - \sqrt{a}) \geq 0$.

$\therefore f(e^2) > 0$.

$\therefore$ 由零点存在性定理, 知 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;6 分

②当 $1 < a < e^2$ 时,

$\therefore$ 当 $x \in [1, a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (a, e^2]$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, a)$ 上单调递减, 在 $(a, e^2]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min} = f(a) = (a-1)(1 - \ln a)$.

(i) 当 $a = e$ 时, $f(x)_{\min} = 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;7 分

(ii) 当 $1 < a < e$ 时, $f(x)_{\min} > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上无零点;8 分

(iii) 当 $e < a < e^2$ 时, $f(x)_{\min} < 0, f(1) = a - 1 > 0$.

(a) 当 $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a < 0$, 即 $\frac{e^4}{2e^2 - 1} < a < e^2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;

(b) 当 $f(e^2) = e^2 + \frac{a}{e^2} - 2a \geq 0$, 即 $e < a \leq \frac{e^4}{2e^2 - 1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 2 个零点;

.....10 分

③当 $a \geq e^2$ 时, $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, e^2]$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上单调递减.

$\therefore f(1) = a - 1 > 0, f(e^2) = e^2 + (\frac{1}{e^2} - 2)a \leq e^2 + (\frac{1}{e^2} - 2)e^2 = -e^2 + 1 < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点.11 分

综上, 当 $1 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上无零点;

当 $a \leq 1$ 或 $a = e$ 或 $a > \frac{e^4}{2e^2 - 1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点;

当 $e < a \leq \frac{e^4}{2e^2 - 1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 2 个零点.12 分

22. 解:(I)由曲线 C 的参数方程,得曲线 C 的普通方程为

$$(x-1)^2 + y^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 得

$$\text{曲线 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho = 2 \cos \theta, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } l \text{ 的极坐标方程为 } \rho \cos \theta + \sqrt{3} \rho \sin \theta - 6 = 0, \text{ 即 } \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 3. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II)设点 P 的极坐标为 (ρ_1, θ) , 点 Q 的极坐标为 (ρ_2, θ) , 其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{由(I)知 } |OP| = \rho_1 = \frac{6}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta}, |OQ| = \rho_2 = 2 \cos \theta. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|OP|}{|OQ|} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6}{2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta} = \frac{6}{1 + \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta} \\ &= \frac{6}{1 + 2 \sin(2\theta + \frac{\pi}{6})}. \end{aligned} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} < 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6} \therefore -\frac{1}{2} < \sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) \leq 1.$$

$$\therefore \text{当 } \sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) = 1, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } \frac{|OP|}{|OQ|} \text{ 取得最小值 } 2. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解:(I)当 $x < -1$ 时, $f(x) = -3x - 3 - 2x + 1 = -5x - 2 > 3$;1 分

$$\text{当 } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = 3x + 3 - 2x + 1 = x + 4 \in [3, \frac{9}{2}]; \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = 3x + 3 + 2x - 1 = 5x + 2 > \frac{9}{2}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

综上,当 $x = -1$ 时, $f(x)_{\min} = 3, \therefore m = 3.$ 5 分

(II)由(I),即证 $(\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq 9.$

$$\because a, b \in (0, +\infty),$$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}, \frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore (\frac{1}{a} + 1 + \frac{b^2}{a})(\frac{1}{b} + 1 + \frac{a^2}{b}) \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} = 9. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 = \frac{b^2}{a}, \\ \frac{1}{b} = 1 = \frac{a^2}{b} \end{cases} \text{ 即 } a = b = 1 \text{ 时, 等号成立.} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$