

参考答案

BDABD CCCDA BB

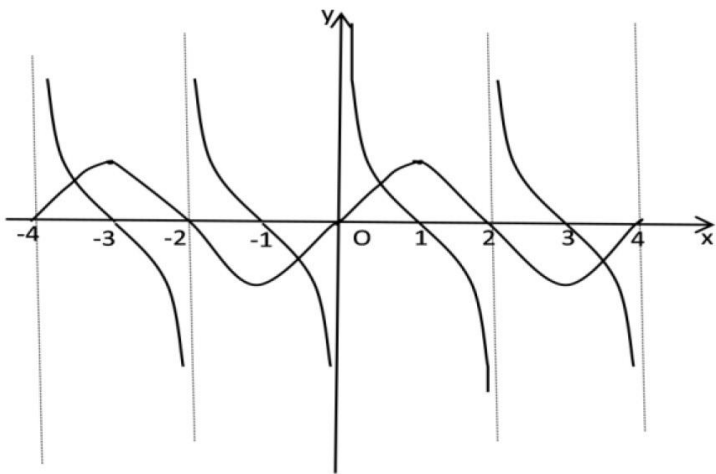
9. 分别取 CD 、 SC 的中点 F 、 G ，连接 EF 、 FG 和 EG ，证明平面 $EFG \parallel$ 平面 BDS ，再由题意证明 $AC \perp$ 平面 EFG ，得出点 P 在 $\triangle EFG$ 的三条边上，求出 $\triangle EFG$ 的周长即可.

10. 因为 $y = f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 又因为函数 $f(x)$ 的周期为 2, 所以

$f(-2) = f(0) = f(2) = 0$, 在同一坐标系中作出函数 $y = f(x)$ 和 $y = \sin \frac{\pi}{2} x$ 的图像

(如图), 观察图像可知 $y = f(x)$ 和 $y = \sin \frac{\pi}{2} x$ 的图像在 $[-3, 2]$ 上有五个交点, 从而函数

$F(x) = f(x) - \sin \frac{\pi}{2} x$ 在区间 $[-3, m]$ ($m \in \mathbb{Z}$ 且 $m > -3$) 上有 5 个零点.



11. 根据题意, 可知抛物线的焦点为 $(0, \frac{p}{2})$, 则直线 AB 的斜率存在且不为 0,

设直线 AB 的方程为 $y = kx + \frac{p}{2}$, 代入 $x^2 = 2py$ 得: $x^2 - 2pkx - p^2 = 0$.

由根与系数的关系得 $x_A + x_B = 2pk$, $x_A x_B = -p^2$, 所以 $|AB| = 2p(1 + k^2)$.

又直线 CD 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + \frac{p}{2}$, 同理 $|CD| = 2p(1 + \frac{1}{k^2})$,

$$\text{所以 } \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{1}{2p(1+k^2)} + \frac{1}{2p(1+\frac{1}{k^2})} = \frac{1}{2p} = \frac{1}{4},$$

所以 $2p=4$. 故 $x^2=4y$. 过点 P 作 PM 垂直于准线, M 为垂足, 则由抛物线的定义可得

$$|PF|=|PM|. \text{ 所以 } |PF|+|PQ|=|PM|+|PQ| \geq |MQ|=3, \text{ 当 } Q, P, M \text{ 三点共线}$$

时, 等号成立, 故选 B.

12.

由奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) > -2$ 知: $f'(x) + 2 > 0$,

故 $F(x) = f(x) + 2x$ 为奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $F(0) = 0$,

$f(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 3(1-2x)$ 等价于 $f(x-1) + 2(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 1 - 4x$,

考虑到 $g(x) = x^2(3-2\ln x) + 1 - 4x$,

且 $g'(x) = x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) + 2x(1-2\ln x) - 4 = -4\ln x - 4$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 为正, $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 为负,

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 递增, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 递减,

考虑到 $x \rightarrow 0$ 时 $g(x)$ 为正, $g(1) = 0$, 故当且仅当 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > 0$,

故 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > 0$, $F(x-1) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $g(x) < 0$.

故原不等式的解集为 $(0, 1)$.

$$13. \quad 60. \quad 14. \quad \frac{\pi}{3} \quad 15. \quad 5$$

【详解】

若①正确，②③错误，则 $c=0$ ， $b=1$ ， $a=2$ ，矛盾，不成立；

若②正确，①③错误，则 $b=2$ ， $c=0$ ， $a=1$ ，矛盾，不成立；

若③正确，①②错误，则 $a=2$ ， $c=1$ ， $b=0$ ，成立， $a+2b+3c=5$ ；

综上所述： $a+2b+3c=5$ 。

故答案为：5。

16 【答案】 $\frac{\ln 3}{4}$

【解析】由 $f(m)=f(n) \Rightarrow 2\ln n - an^2 + 3 = 2\ln m - am^2 + 3$ ，所以 $a = \frac{2(\ln n - \ln m)}{n^2 - m^2}$ ，

令 $n=m+t$ ，($t \geq 2$)，则 $a = \frac{\ln(1+\frac{t}{m})}{t(2m+t)}$ ，($m \in [1,5]$ ， $t \geq 2$)，

显然 $g(m) = \frac{\ln(1+\frac{t}{m})}{t(2m+t)}$ ，在 $m \in [1, +\infty)$ 单调递减，

$\therefore a \leq g(1) = \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)}$ ($t \geq 2$)

令 $h(t) = g(1) = \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)}$ ，($t \geq 2$)， $h'(t) = \frac{t^2 + 2t - 2(t+1)^2 \ln(t+1)}{[t(t+2)]^2(t+1)}$ ，

$\because t \geq 2$ ， $\therefore 2\ln(t+1) > 1$ ，则 $t^2 + 2t - 2(t+1)^2 \ln(t+1) < 0$

$\therefore$ 令 $h(t) = g(1) = \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)}$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递减，

$\therefore a \leq h(2) = \frac{\ln 3}{4}$ ， $\therefore$ 实数 a 的最大值为 $\frac{\ln 3}{4}$ 。

17. (1) $C = \frac{\pi}{3}$ ；(2) $c = 6$ 。

【详解】(1) $\vec{m} \cdot \vec{n} = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A = \sin(A+B)$

对于 $\triangle ABC$ ， $A+B = \pi - C$ ， $0 < C < \pi \therefore \sin(A+B) = \sin C$ ，且 $\sin C \neq 0$ ，

$\therefore \sin 2C = \sin C \Rightarrow 2 \sin C \cdot \cos C = \sin C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$

(2) 由 $\sin A, \sin C, \sin B$ 成等差数列，得 $2 \sin C = \sin A + \sin B$ ，

由正弦定理得 $2c = a + b \therefore \vec{CA} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 18, \therefore \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 18$ ，

即 $ab \cos C = 18, ab = 36$ 由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 3ab$ ，

$\therefore c^2 = 4c^2 - 3 \times 36, c^2 = 36$ ， $\therefore c = 6$

18 解析：(I) 任一学生爱好羽毛球运动的概率为 $\frac{3}{8}$ ，故 $X \sim B\left(3, \frac{3}{8}\right)$

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{5}{8}\right)^3=\frac{125}{512} \quad P(X=1)=C_3^1\frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{225}{512}$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{5}{8}=\frac{135}{512} \quad P(X=3)=C_3^3\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{27}{512}$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{27}{512}$

$$EX=3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8} \quad (\text{人})$$

$$(II) \quad K^2=\frac{80(20\times 20-10\times 30)^2}{30\times 50\times 30\times 50}=\frac{80}{225}\approx 0.3556 < 2.706, \text{ 故没有充分证据判定}$$

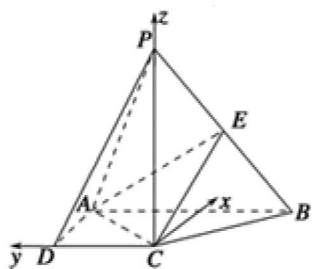
爱好羽毛球运动与性别有关联.

19. 解析: (I) $\because PC \perp$ 平面 $ABCD, AC \subset$ 平面 $ABCD, \therefore AC \perp PC$

因为 $AB=4, AD=CD=2$, 所以 $AC=BC=\sqrt{2}$, 所以 $AC^2+BC^2=AB^2$, 所以

$AC \perp BC$, 又 $BC \cap PC=C$, 所以 $AC \perp$ 平面 PBC . 因为 $AC \subset$ 平面 EAC , 所以

平面 $EAC \perp$ 平面 PBC .



(II) (理科) 如图,

以点 C 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CP}$ 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向, 建立空间直角坐标

系, 则 $C(0,0,0), A(2,2,0), B(2,-2,0)$. 设 $P(0,0,2a)(a>0)$, 则 $E(1,-1,a)$

$\overrightarrow{CA}=(2,2,0), \overrightarrow{CP}=(0,0,2a), \overrightarrow{CE}=(1,-1,a)$ 取 $\vec{m}=(1,-1,0)$, 则

$\vec{m} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{m} \cdot \overrightarrow{CP} = 0, \vec{m}$ 为面 PAC 法向量.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为面 EAC 的法向量, 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$,

即 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+az=0 \end{cases}$, 取 $x=a, y=-a, z=-2$, 则 $\vec{n}=(a,-a,-2)$

依题意 $|\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $a=2$. 于是

$$\vec{n} = (2, -2, -2), \overrightarrow{PA} = (2, 2, -4).$$

$$\text{设直线 } PA \text{ 与平面 } EAC \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{PA}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{即直线 } PA \text{ 与平面 } EAC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$20. \text{【详解】} (1) \because \text{ 焦距为 } 2\sqrt{2}, \text{ 则 } c = \sqrt{2}, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\because P\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) \text{ 为弦 } AB \text{ 的中点, 根据中点坐标公式可得: } x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, y_1 + y_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because \text{ 将其 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 代入椭圆 } C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \\ b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{ 将两式作差可得: } b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0,$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = \frac{3b^2}{a^2} = 1,$$

$$\therefore a^2 = 3b^2 \text{——①. } \because a^2 - b^2 = c^2 \text{——② 由①②得: } \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{ 椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

$$(2) \because M, Q, N \text{ 三点共线, } \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{ON}$$

$$\therefore \text{ 根据三点共线性质可得: } \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{3} = 1, \text{ 则 } \lambda = 2$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 0, \therefore x_1 = -2x_2.$$

$$\text{将直线 } l \text{ 和椭圆 } C \text{ 联立方程 } \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases} \text{ 消掉 } y.$$

$$\text{可得: } (1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0.$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 3k^2 - m^2 + 1 > 0 \text{——①,}$$

$$\text{根据韦达定理: } x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1 + 3k^2}, x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 3}{1 + 3k^2},$$

$$\text{代入 } x_1 = -2x_2, \text{ 可得: } x_2 = \frac{6km}{1+3k^2}, -2x_2^2 = \frac{3m^2-3}{1+3k^2},$$

$$\therefore -2 \times \frac{36k^2m^2}{(1+3k^2)^2} = \frac{3m^2-3}{1+3k^2}, \text{ 即 } (9m^2-1) \cdot 3k^2 = 1-m^2.$$

$$\because 9m^2-1 \neq 0, m^2 \neq \frac{1}{9},$$

$$\therefore 3k^2 = \frac{1-m^2}{9m^2-1} \geq 0 \text{ --- ②},$$

$$\text{代入①式得 } \frac{1-m^2}{9m^2-1} - m^2 + 1 > 0, \text{ 即 } \frac{1-m^2}{9m^2-1} + (1-m^2) > 0,$$

$$\therefore m^2(m^2-1)(9m^2-1) < 0, \therefore \frac{1}{9} < m^2 < 1 \text{ 满足②式},$$

$$\therefore \frac{1}{3} < m < 1 \text{ 或 } -1 < m < -\frac{1}{3}.$$

21. 【详解】(1) ①因为 $f(x) = \frac{e^x}{ax^2+x+1}$ 单调递增, 所以

$$f'(x) = \frac{e^x[ax^2+(1-2a)x]}{(ax^2+x+1)^2} \geq 0 \text{ 对任意 } x \in [0, +\infty) \text{ 恒成立, 即 } ax \geq 2a-1 \text{ 对任意}$$

$x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

$$\therefore 2a-1 \leq 0, \text{ 即 } 0 < a \leq \frac{1}{2};$$

②由①当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{ax^2+x+1}$ 单调递增, 故 $f(x) \geq 1$ 成立, 符合题意,

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{2a-1}{a}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2a-1}{a}\right)$ 上递减, $\therefore f\left(\frac{2a-1}{a}\right) < f(0) = 1$ 不合题意;

综上, 实数 a 的取值范围为 $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

(2) 解法一: 因为 $f(x) = \frac{e^x}{ax^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ,

所以 $f'(x) = \frac{e^x(ax^2-2ax+1)}{(ax^2+1)^2} = 0$ 有两个不同的解, 故 $\Delta = 4a^2 - 4a > 0$, 又

$a > 0$, 所以 $a > 1$,

设两根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = \frac{1}{a}$, 故 $0 < x_1 < 1$,

$$f(x_1) + f(x_2) = \frac{e^{x_1}}{ax_1^2 + 1} + \frac{e^{x_2}}{ax_2^2 + 1} = \frac{e^{x_1}}{\frac{x_1}{x_2} + 1} + \frac{e^{x_2}}{\frac{x_2}{x_1} + 1} = \frac{e^{x_1}x_2 + e^{x_2}x_1}{x_1 + x_2} = \frac{e^{x_1}(2-x_1) + e^{2-x_1}x_1}{2}$$

$$\text{令 } F(x) = \frac{e^x(2-x) + e^{2-x}x}{2}, \text{ 因为 } F'(x) = \frac{e^x(1-x) + \frac{e^2(1-x)}{e^x}}{2} > 0, \text{ 所以 } F(x)$$

在 $(0,1)$ 上递增, 所以 $F(x) < F(1) = e$;

$$\text{又 } 2[f(x_1) + f(x_2)] - \frac{3}{a} = e^{x_1}(2-x_1) + \frac{e^2x_1}{e^{x_1}} - 3x_1(2-x_1)$$

$$\text{令 } G(x) = e^x(2-x) + \frac{e^2x}{e^x} - 3x(2-x), \quad x \in (0,1), \text{ 则}$$

$$G'(x) = (1-x) \left(e^x + \frac{e^2}{e^x} - 6 \right),$$

$$\text{令 } G'(x) = 0 \text{ 得 } e^x = 3 \pm \sqrt{9-e^2}, \text{ 又 } x \in (0,1), \text{ 则 } e^x = 3 - \sqrt{9-e^2},$$

$$\text{即 } x = \ln(3 - \sqrt{9-e^2}), \text{ 记为 } x_0, \text{ 则 } G(x) \text{ 在 } (0, x_0) \text{ 上递增, 在 } (x_0, 1) \text{ 上递减,}$$

$$\text{又 } G(0) = 2, \quad G(1) = 2e - 3 > 2, \text{ 所以 } G(x) > G(0) = 2, \text{ 即}$$

$$f(x_1) + f(x_2) > 1 + \frac{3}{2a}, \text{ 综上: } 1 + \frac{3}{2a} < f(x_1) + f(x_2) < e.$$

解法二: 不等式的右边同解法一;

$$\text{由 (1) 当 } x \geq 0 \text{ 时, } \frac{e^x}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} \geq 1 \text{ 恒成立, 所以有当 } x > 0 \text{ 时, } e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1, \text{ 所}$$

$$\text{以 } f(x_1) + f(x_2) = \frac{e^{x_1}}{ax_1^2 + 1} + \frac{e^{x_2}}{ax_2^2 + 1} = \frac{e^{x_1}}{\frac{x_1}{x_2} + 1} + \frac{e^{x_2}}{\frac{x_2}{x_1} + 1} = \frac{e^{x_1}x_2 + e^{x_2}x_1}{x_1 + x_2}$$

$$> \frac{x_2 \left(\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 + 1 \right) + x_1 \left(\frac{1}{2}x_2^2 + x_2 + 1 \right)}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x_1x_2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 + x_1 + x_2}{2} = 1 + \frac{3}{2}x_1x_2 = 1 + \frac{3}{2a}.$$

22. 【详解】

$$(I) \text{ 由 } \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}, \text{ 消去参数 } \alpha \text{ 可得 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \text{ 故曲线 } C \text{ 的普通方程为}$$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

$$\text{由 } \rho \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 可得 } -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即}$$

$$\rho \sin\theta + \rho \cos\theta + 1 = 0, \text{ 将 } x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta \text{ 代入上式, 可得 } x + y + 1 = 0,$$

故直线 l 的直角坐标方程为 $x + y + 1 = 0$.

(II) 由 (I) 可知, 点 $P(2, -3)$ 在直线 l 上, 可设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

$$\text{将 } x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, y = -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \text{ 代入 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \text{ 化简可得 } 3t^2 - 16\sqrt{2}t + 40 = 0,$$

$$\text{设 } A, B \text{ 两点对应的参数分别为 } t_1, t_2, \text{ 则 } t_1 t_2 = \frac{40}{3},$$

$$\text{所以 } |PA| \cdot |PB| = |t_1| \cdot |t_2| = t_1 t_2 = \frac{40}{3}.$$

$$23. \text{ 解析: (I) } f(x) = \frac{|3x+2| - |1-2x|}{|x+3|} \leq \frac{|3x+2+1-2x|}{|x+3|} = 1, \text{ 等号成立,}$$

$$\text{当且仅当 } x \leq -\frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}, \text{ 所以 } M = 1.$$

$$(II) \quad 2(a+b+c)+1 \geq 2(a+b+a^2+b^2)+1 \geq 2\left(a+b+\frac{(a+b)^2}{2}\right)+1$$

$$= (a+b+1)^2 \geq 0,$$

$$\text{当且仅当 } a=b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2} \text{ 时取等, 所以存在实数 } a=b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2} \text{ 满足条件.}$$