

成都七中2020~2021 学年度上期2021届高三阶段性测试

数学试卷（理科）

考试时间：120 分钟 总分：150 分

一. 选择题（每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求. 把答案涂在答题卷上.）

1. 复数 $z = (1+i)^2$ 的虚部为 ()

- A. $2i$ B. 2 C. $-2i$ D. -2

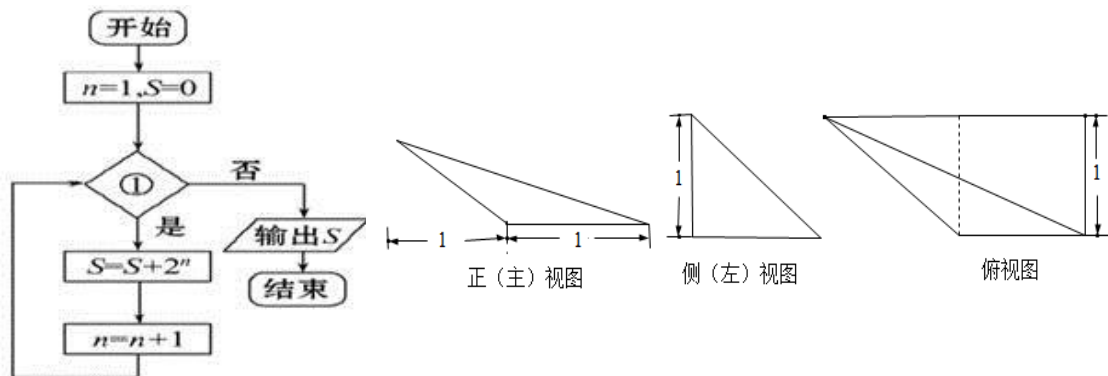
2. $P = \{y | y = x^2\}$, $Q = \{x | x^2 + y^2 = 2\}$, 则 $P \cap Q =$ ()

- A. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ B. $\{(1,1), (-1,1)\}$ C. $\{0, \sqrt{2}\}$ D. $[0, \sqrt{2}]$

3. “ $a > 2$ ” 是 “函数 $f(x) = (x-a)e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有极值” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 若如图所示的程序框图输出的 S 是 **126**，则条件①可为 ()



- A. $n \leq 5?$ B. $n \leq 6?$ C. $n \leq 7?$ D. $n \leq 8?$

5. 某几何体的三视图如上图（右）所示，则该几何体的体积为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

6. 关于函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$) 有如下命题，其中正确的个数有 ()

① $y = f(x)$ 的表达式可改写为 $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$)

② $y = f(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数；

③ $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称；

④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称.

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

7. 为抗击新冠病毒,某部门安排甲、乙、丙、丁、戊五名专家到三地指导防疫工作.因工作需要,每地至少需安排一名专家,其中甲、乙两名专家必须安排在同一地工作,丙、丁两名专家不能安排在同一地工作,则不同的分配方法总数为()

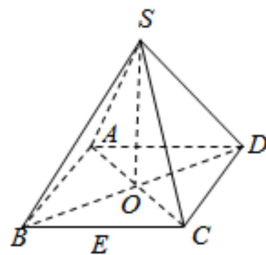
- A. 18 B. 24 C. 30 D. 36

8. 在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $l: kx-y+4k=0$ 与曲线 $y=\sqrt{9-x^2}$ 交于 A, B 两点,且 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}=2$,则 $k=()$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

9. 如图,四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$, AC 与 BD 的交点为 O , $SO \perp$ 平面 $ABCD$ 且 $SO=\sqrt{2}$, E 是边 BC 的中点,动点 P 在四棱锥表面上运动,并且总保持 $PE \perp AC$,则动点 P 的轨迹的周长为()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$
C. $1+\sqrt{2}$ D. $1+\sqrt{3}$



10. 已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 的周期为2,且 $x \in (0,1]$ 时, $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.若函数 $F(x)=f(x)-\sin \frac{\pi}{2}x$ 在区间 $[-3,m]$ ($m \in Z$ 且 $m > -3$)上至少有5个零点,则 m 的最小值为()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

11. 过抛物线 $E: x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB, CD ,设 P 为抛物线上的一动点, $Q(1,2)$,若 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4}$,则 $|PF|+|PQ|$ 的最小值是()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

12. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) > -2$,则不等式 $f(x-1) < x^2(3-2\ln x)+3(1-2x)$ 的解集为()

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $(0,1)$ C. $(1,e)$ D. $(\frac{1}{e}, e)$

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分,把答案填在答题卷的横线上.)

13. 已知 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 展开式的二项式系数之和为64,则其展开式中常数项是_____.

14. 已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, \vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直,则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

15. 已知集合 $\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$, 有下列三个关系① $a \neq 2$; ② $b = 2$; ③ $c \neq 0$, 若三个关系中有且只有一个正确的, 则 $a + 2b + 3c =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - ax^2 + 3$, 若存在实数 $m, n \in [1, 5]$ 满足 $n - m \geq 2$ 时,

$f(m) = f(n)$ 成立, 则实数 a 的最大值为_____

三、解答题(共 70 分, 22 与 23 题二选一, 各 10 分, 其余大题均为 12 分)

17. (本题 12 分) 已知向量 $\vec{m} = (\sin A, \sin B)$, $\vec{n} = (\cos B, \cos A)$, $\vec{m} \cdot \vec{n} = \sin 2C$,

且 A、B、C 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 所对的角.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\sin A, \sin C, \sin B$ 成等差数列, 且 $\vec{CA} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 18$, 求 c 边的长.

18. (本题 12 分) 某校随机调查了 80 位学生, 以研究学生中爱好羽毛球运动与性别的关系, 得到下面的数据表:

	爱好	不爱好	合计
男	20	30	50
女	10	20	30
合计	30	50	80

I) 将此样本的频率估计为总体的概率, 随机调查了本校的 3 名学生. 设这 3 人中爱好羽毛球运动的人数为 X , 求 X 的分布列和期望值;

II) 根据表中数据, 能否有充分证据判定爱好羽毛球运动与性别有关联? 若有, 有多大把握?

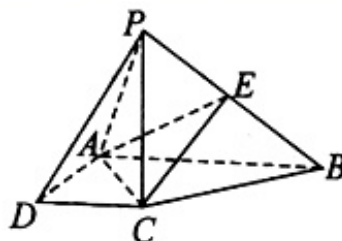
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本题 12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是直角梯形,

$AB \perp AD, AB \parallel CD, PC \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = 2AD = 2CD = 4, PC = 2a, E$ 是 PB

的中点.



(1) 求证: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求直线 PA 与平面 AEC 所成角的正弦值.

20. (本题 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 焦距为

$2\sqrt{2}$, 直线 $l: y = x - 1$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, $P\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ 为弦 AB 的中点.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于不同的两点 $M, N, Q(0, m)$, 若

$\overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OQ}$ (O 为坐标原点), 求 m 的取值范围.

21. (本题 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{ax^2 + bx + 1}$, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}, e$ 为自然对数

的底数. (1) 若 $b = 1, x \in [0, +\infty)$, ①若函数 $f(x)$ 单调递增, 求实数 a 的取值范围;

②若对任意 $x \geq 0, f(x) \geq 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $b = 0$, 且 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 求证: $1 + \frac{3}{2a} < f(x_1) + f(x_2) < e$.

22. (本题 10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为

参数). 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(I) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II) 设点 $P(2, -3)$, 若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

23. (本题 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(I) 求函数 $f(x) = \frac{|3x+2| - |1-2x|}{|x+3|}$ 的最大值 M .

(II) 若实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 \leq c \leq M$, 证明: $2(a+b+c)+1 \geq 0$, 并说明取等条件.