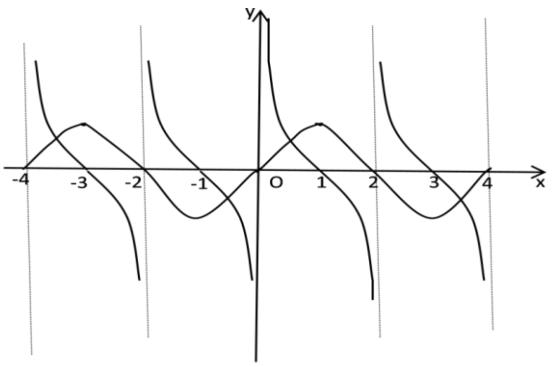
参考答案

BDCAB　DCCDA　BC

9．分别取 CD、SC 的中点 F、G，连接 EF、FG 和 EG，证明平面 EFG// 平面 BDS，再由题意证明 AC⊥平面 EFG，得出点 P 在△EFG 的三条边上，求出△EFG 的周长即可.

10. 因为 $y=f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=0$,又因为函数 $f\left(x\right)$ 的周期为 2,所以 $f(-2)=f(0)=f(2)=0$,在同一坐标系中作出函数 $y=f(x)$ 和 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ 的图像(如图)，观察图像可知 $y=f(x)$ 和 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ 的图像在[-3,2]上有五个交点,从而函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-\sin\frac{\pi}{2}x$ 在区间 $\left[-3,m\right]$（$m\in Z$ 且 $m>-3$）上有 5 个零点.



11. 根据题意，可知抛物线的焦点为 $(0,\frac{p}{2})$，则直线 AB 的斜率存在且不为 0，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{p}{2}$，代入 $x^2=2py$ 得：$x^2-2pkx-p^2=0$.

由根与系数的关系得 $x_A+x_B=2pk$，$x_Ax_B=-p^2$，所以 $|AB|=2p\left(1+k^2\right)$.

又直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{p}{2}$，同理 $|CD|=2p(1+\frac{1}{k^2})$，

所以 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{2p(1+k^2)}+\frac{1}{2p(1+\frac{1}{k^2})}=\frac{1}{2p}=\frac{1}{4}$，

所以 $2p=4$. 故 $x^2=4y$. 过点 P 作 PM 垂直于准线，M 为垂足，则由抛物线的定义可得 $|PF|=|PM|$. 所以 $|PF|+|PQ|=|PM|+|PQ|\geq|MQ|=3$，当 Q，P，M 三点共线时，等号成立，故选 B。

法二由焦点弦长公式可得 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{\frac{2p}{\sin^2\theta}}+\frac{1}{\frac{2p}{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})}}=\frac{1}{2p}=\frac{1}{4}$，下同法一

12.　C

令 $g(x)=f(x)+\sin x$，$g'(x)=f'(x)+\cos x<0$，所以 $g(x)=f(x)+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ge f(x)+\sin x-\cos x \Rightarrow g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ge g(-x) \Rightarrow x+\frac{\pi}{2}\le -x \Rightarrow x\le -\frac{\pi}{4}$

所以不等式 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ge f(x)+\sin x-\cos x$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{\pi}{4}\right]$，故选C.

13．7　14. $\frac{\pi}{3}$　15. 5

若①正确，②③错误，则 $c=0$，$b=1$，$a=2$，矛盾，不成立；

若②正确，①③错误，则 $b=2$，$c=0$，$a=1$，矛盾，不成立；

若③正确，①②错误，则 $a=2$，$c=1$，$b=0$，成立，$a+2b+3c=5$；

综上所述：$a+2b+3c=5$.

16 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{e}\right]$.

【详解】∵存在 $x_0\in\left[\frac{a}{3},b\right]$，使 $f(x_0)\le g(x_0)$ 成立，∴ $\frac{a}{3}<b$，$a>0$ 得 $\frac{b}{a}>\frac{1}{3}$；

令 $h(x)=f(x)-g(x)=x\ln x-x\ln a+\frac{b}{3}$；∴ $h'(x)=\ln x+1-\ln a=\ln\left(\frac{x}{a}\right)+1$；

∵ $x_0\in\left[\frac{a}{3},b\right]$，$x_0\ge\frac{a}{3}$，$\frac{x_0}{a}\ge\frac{1}{3}$，令 $\ln\frac{x}{a}+1>0$，即 $x>\frac{a}{e}$ 时，$h(x)$ 递增；

$\frac{a}{3}<x<\frac{a}{e}$ 时，$h(x)$ 递减；

①若 $b\le\frac{a}{e}$，即 $\frac{b}{a}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{e}\right],h(x)$ 在 $\left[\frac{a}{3},b\right]$ 上单调递减；

∴ $h(x)_{\min}=h(b)=b\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{b}{3}\le 0$，对 $\frac{b}{a}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{e}\right]$ 恒成立；

②若 $\frac{a}{3}<\frac{a}{e}<b$，即 $\frac{b}{a}\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，$h(x)$ 在 $\left[\frac{a}{3},b\right]$ 上先递减后递增；

∴ $h(x)_{\min}=h\left(\frac{a}{e}\right)=\frac{a}{e}\ln\frac{a}{e}-\frac{a}{e}\ln a+\frac{b}{3}\le 0$，∴ $-\frac{a}{e}+\frac{b}{3}\le 0$，$\frac{b}{a}\le\frac{3}{e}$，即

$\frac{1}{e}<\frac{b}{a}\le\frac{3}{e}$，综上 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{e}\right]$.

17.（1）$C=\frac{\pi}{3}$；（2）$c=6$.

【详解】（1）$\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A=\sin(A+B)$

对于 $\Delta ABC, A+B=\pi-C, 0<C<\pi \therefore \sin(A+B)=\sin C$，且 $\sin C\neq 0$，

$\therefore \sin 2C=\sin C,\Rightarrow 2\sin C\cdot\cos C=\sin C\Rightarrow \cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$

（2）由 $\sin A,\sin C,\sin B$ 成等差数列，得 $2\sin C=\sin A+\sin B$，

由正弦定理得 $2c=a+b\because \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=18$，即 $ab\cos C=18,ab=36$ 由余弦弦定理

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab$，$\therefore c^2=4c^2-3\times 36,c^2=36$，$\therefore c=6$

18【详解】

（1）$\bar{x}=\frac{40+50+60+20+30}{5}=40$，$\bar{y}=\frac{110+180+210+30+70}{5}=120$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{28700-5\times 40\times 120}{9000-5\times 40^2}=4.7,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=120-4.7\times 40=-68$，得到线性回归方程为 $y=4.7x-68$；

（2）作出列联表如下：

	东部城市	西部城市	总计
甲	150	50	200
乙	500	100	600
总计	650	150	800

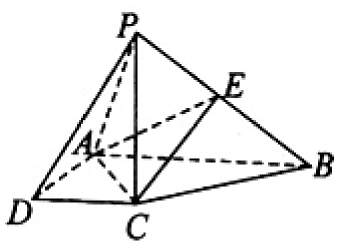
计算得 $K^2=\frac{800\times(150\times 100-50\times 500)^2}{200\times 600\times 650\times 150}=6.838>6.635$，

所以有 99%的把握认为东、西部的地区差异与甲、乙两种产品的销售量相关.

19. 解析：（Ⅰ）$\because PC\perp$ 平面 $ABCD,AC\subset$ 平面 $ABCD,\therefore AC\perp PC$

因为 $AB=4,AD=CD=2$，所以 $AC=BC=\sqrt{2}$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$，又 $BC\cap PC=C$，所以 $AC\perp$ 平面 PBC. 因为 $AC\subset$ 平面 EAC，所以平面 $EAC\perp$ 平面 PBC.

（Ⅱ）



$\because E$为PB中点，故 P 到平面 AEC 的距离等于 B 到平面 AEC 的距离.

$V_{E-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times2=\frac{8}{3}$

由（1） $AC\perp CE\therefore S_{\Delta ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot CE=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$

由体积法可得 $\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}d$ 故 B 到平面 AEC 的距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

即故 P 到平面 AEC 的距离等于 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

20.【详解】(1) $\because$ 焦距为 $2\sqrt{2}$，则 $c=\sqrt{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\because$ $P\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$ 为弦 AB 的中点，根据中点坐标公式可得：$x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$y_1+y_2=-\frac{1}{2}$，

又$\because$ 将其 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 代入椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore$ $\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}$

$\therefore$ 将两式作差可得：$b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

$\therefore k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\frac{3b^2}{a^2}=1$，

$\therefore a^2=3b^2$——①. $\because$ $a^2-b^2=c^2$——②由①②得：$\begin{cases}a^2=3\\ b^2=1\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（2）将直线 l 和椭圆 C 联立方程 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+3y^2=3\end{cases}$ 消掉 y.

可得：$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$.

$\Delta>0\Rightarrow3k^2-m^2+1>0$——①,

根据韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{1+3k^2}$，

代入 $x_1=-2x_2$，可得：$x_2=\frac{6km}{1+3k^2}$，$-2x_2^2=\frac{3m^2-3}{1+3k^2}$，

$\therefore$ $-2\times\frac{36k^2m^2}{(1+3k^2)^2}=\frac{3m^2-3}{1+3k^2}$，即 $(9m^2-1)\cdot3k^2=1-m^2$.

$\because\ 9m^2-1\neq 0$, $m^2\neq\dfrac{1}{9}$, $\therefore 3k^2=\dfrac{1-m^2}{9m^2-1}\geq 0$——②,

代入①式得 $\dfrac{1-m^2}{9m^2-1}-m^2+1>0$, 即 $\dfrac{1-m^2}{9m^2-1}+\left(1-m^2\right)>0$,

$\therefore m^2\left(m^2-1\right)\left(9m^2-1\right)<0$, $\therefore \dfrac{1}{9}<m^2<1$满足②式,

$\therefore \dfrac{1}{3}<m<1$或$-1<m<-\dfrac{1}{3}$.

21【详解】(1) $f'(x)=x-ax^2=-ax\left(x-\dfrac{1}{a}\right)$,

∴当 $f'(x)=0$ 时，$x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{a}$，又 $a>0$，

∴当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$

时，$f'(x)<0$，

∴$f(x)$的极小值为 $f(0)=0$，$f(x)$的极大值为 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{6a^2}$.

(2) ∵$a=e$，

∴$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}ex^3+e^x(x-1)$，$g'(x)=x(e^x-ex+1)$.

①记 $h(x)=e^x-ex+1$，则 $h'(x)=e^x-e$，

当 $x\in(-\infty,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$是减函数；

$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增函数，

∴$h(x)\geqslant h(1)=1>0$，

则在$(0,+\infty)$上，$g'(x)>0$；在$(-\infty,0)$上，$g'(x)<0$，

∴函数 $g(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$，单调递减区间是$(-\infty,0)$.

②证明：$x>0$ 时，

$g'(x)=x(e^x-ex+1)\geqslant 1+\ln x\Leftrightarrow e^x-ex+1\geqslant\dfrac{1+\ln x}{x}$，

由①知，$h(x)=e^x-ex+1\geqslant 1$，

记 $\phi(x)=1+\ln x-x(x>0)$. 则 $\phi'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

在区间$(1,+\infty)$上，$\phi'(x)<0$，$\phi(x)$是减函数，

∴$\phi(x)\leqslant\phi(1)=0$，即 $1+\ln x-x\leqslant 0$，$\dfrac{1+\ln x}{x}\leqslant 1$，

∴$e^x-ex+1\geqslant 1\geqslant\dfrac{1+\ln x}{x}$，即 $g'(x)\geqslant 1+\ln x$ 恒成立.

22.【详解】

（Ⅰ）由$\begin{cases}x=\sqrt{2}cos\alpha\\ y=sin\alpha\end{cases}$，消去参数$\alpha$可得$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，故曲线$C$的普通方程为

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

由$\rho sin\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得$-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即

$\rho sin\theta+\rho cos\theta+1=0$,

将$x=\rho cos\theta$，$y=\rho sin\theta$代入上式，可得$x+y+1=0$,

故直线l的直角坐标方程为$x+y+1=0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，点$P\left(2,-3\right)$在直线l上，可设直线l的参数方程为

$\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），将$x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t$，$y=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}t$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，化

简可得$3t^2-16\sqrt{2}t+40=0$，

设A，B两点对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1t_2=\frac{40}{3}$，

所以$|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=t_1t_2=\frac{40}{3}$.

23．解析：（Ⅰ）$f(x)=\frac{|3x+2|-|1-2x|}{|x+3|}\le\frac{|3x+2+1-2x|}{|x+3|}=1$，等号成立，

当且仅当$x\le-\frac{2}{3}$或$x\ge\frac{1}{2}$，所以$M=1$.

（Ⅱ）$2(a+b+c)+1\ge2(a+b+a^2+b^2)+1\ge2\left(a+b+\frac{(a+b)^2}{2}\right)+1$

$=(a+b+1)^2\ge0$，

当且仅当$a=b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$时取等，

所以存在实数$a=b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$满足条件.