

2021 届南宁市普通高中毕业班摸底测试

理科数学

(考试时间:120 分钟 满分:150 分)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

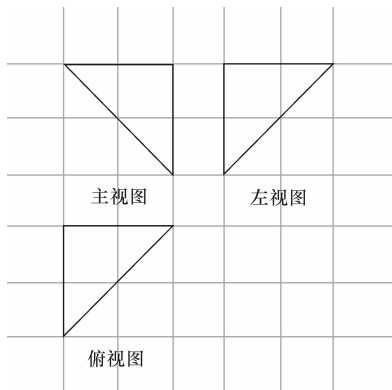
第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{t \in \mathbf{Z} | t = 2x + 1, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为
A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个
2. 复数 $\frac{2+i}{1-i}$ 的虚部是
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}i$ C. $\frac{3}{2}i$ D. $\frac{3}{2}$
3. 已知 a, b 均为单位向量, 它们的夹角为 120° , $c = \lambda a - \mu b$, 若 $a \perp c$, 则下列结论正确的是
A. $2\lambda + \mu = 0$ B. $2\lambda - \mu = 0$
C. $\lambda - \mu = 0$ D. $\lambda + \mu = 0$
4. 设直线 $x = 4$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 D, E 两点, 若 $OD \perp OE (O \text{ 为坐标原点})$, 则 C 的焦点坐标为
A. $(\frac{1}{4}, 0)$ B. $(\frac{1}{2}, 0)$ C. $(1, 0)$ D. $(2, 0)$
5. 一组数据的平均数为 m , 方差为 n , 将这组数据的每个数都乘以 $a (a > 0)$ 得到一组新数据, 则下列说法正确的是
A. 这组新数据的平均数为 m
B. 这组新数据的平均数为 $a + m$
C. 这组新数据的方差为 an
D. 这组新数据的标准差为 $a\sqrt{n}$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边为 a, b, c , 若 $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

7. 如图, 网格纸上小正方形边长为 1, 粗线是一个棱锥的三视图, 则此棱锥的表面积为

- A. $4+4\sqrt{2}$
 B. $2+6\sqrt{2}$
 C. $3+3\sqrt{2}$
 D. 8



8. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin \alpha$ 的值为

- A. $\frac{4\sqrt{3} \pm 3}{10}$
 B. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$
 C. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$
 D. $\frac{4\sqrt{3}-3}{5}$

9. 射线测厚技术原理公式为 $I = I_0 e^{-\rho \mu t}$, 其中 I_0, I 分别为射线穿过被测物前后的强度, e 是自然对数的底数, t 为被测物厚度, ρ 为被测物的密度, μ 是被测物对射线的吸收系数. 工业上通常用镅 ^{241}Am 低能 γ 射线测量钢板的厚度. 若这种射线对钢板的半价层厚度为 0.8 (单位: cm), 钢的密度为 7.6 (单位: g/cm^3), 则这种射线的吸收系数为

(注: 半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度, $\ln 2 = 0.6931$, 结果精确到 0.001)

- A. 0.110
 B. 0.112
 C. 0.114
 D. 0.116

10. 已知过定点 $A(0, b)$ ($b > 0$) 的直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切时, 与 y 轴夹角为 45° , 则直线 l 的方程为

- A. $x - y + \sqrt{2} = 0$
 B. $x + y - 1 = 0$
 C. $x + y - \sqrt{2} = 0$ 或 $x - y + \sqrt{2} = 0$
 D. $x + y - 1 = 0$ 或 $x - y + 1 = 0$

11. 已知双曲线 C 的中心为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 设双曲线 C 的左焦点为 F , 右顶点为 B , 点 P 为 C 上一点, 且 $PF \perp x$ 轴, 若 $|PF| = 2|BF|$, 则双曲线 C 的离心率为

- A. 3
 B. 2
 C. $\frac{3}{2}$
 D. $\frac{4}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$, 若 $a = f(2^{0.3})$, $b = f(2)$, $c = f(\log_2 5)$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $c < b < a$
 B. $a < b < c$
 C. $c > a > b$
 D. $b > c > a$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leq 0, \\ 2x-3y+3 \geq 0, \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最小值是_____.

14. 若 $(x+2)^5 = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, 则 $a+b+c+d+e$ 的值为_____.

15. 已知球在底面半径为 1、高为 $2\sqrt{2}$ 的圆锥内, 则该圆锥内半径最大的球的体积为_____.

16. 已知 $a > \frac{1}{3}$, 函数 $f(x) = \sin x + 2x - \frac{1}{x}$. 若 $f(1-3a) + f(a^2-2a+3) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

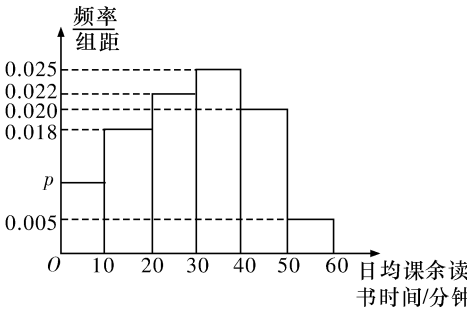
三、解答题:本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

- 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - (2n-3)$.
 (I) 计算 a_2, a_3 , 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并利用数学归纳法加以证明;
 (II) 记 $b_n = 2^n \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

某地区为了解学生课余时间的读书情况, 随机抽取了 n 名学生进行调查, 将调查得到的学生日均课余读书时间分成 $[0, 10), [10, 20), [20, 30), [30, 40), [40, 50), [50, 60]$ 六组, 绘制成如图所示的频率分布直方图, 将日均课余读书时间不低于 40 分钟的学生称为“读书之星”, 日均课余读书时间低于 40 分钟的学生称为“非读书之星”. 已知抽取的样本中日均课余读书时间低于 10 分钟的有 10 人.



- (I) 求 p 和 n 的值;
 (II) 根据已知条件和下面表中两个数据完成下面的 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 以上的把握认为“读书之星”与性别有关?

	非读书之星	读书之星	总计
男			
女		10	55
总计			

- (III) 将本次调查所得到有关事件发生的频率视为其发生的概率, 现从该地区大量学生中, 随机抽取 20 名学生参加读书与文学素养的研讨会, 记被抽取的“读书之星”人数为随机变量 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

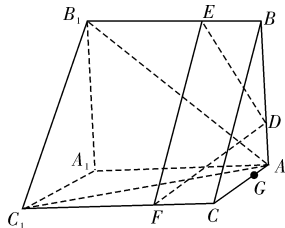
$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,点 E, F 在侧棱 BB_1, CC_1 上,且 $B_1E=2EB, C_1F=2FC$,点 D, G 在侧棱 AB, AC 上,且 $BD=2DA, CG=2GA$.

(I)证明: 点 G 在平面 EFD 内;

(II) 若 $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 1$, $AA_1 = 2$, 求二面角 $A_1 - AB_1 - C_1$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 若 M 是椭圆上的一个点, 且 $|MF_1| + |MF_2| = 4\sqrt{2}$.

(I)求椭圆 C 的标准方程;

(II) 已知点 $P(2, y_0)$ 是椭圆 C 上位于第一象限内一点, 直线 l 平行于 OP (O 为原点) 交椭圆 C 于 A, B 两点, 点 D 是线段 AB 上 (异于端点) 的一点, 延长 PD 至点 Q , 使得 $3\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{DQ}$, 求四边形 $PAQB$ 面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a(x-2)e^x + (x-1)^2$, ($a \neq 0, a \in \mathbf{R}$).

(I) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $a > 0$, 证明: 函数 $y = f(x)$ 有两个不同的零点.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程:

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为: $\begin{cases} x = -1 + 2\cos \alpha \\ y = -\sqrt{3} + 2\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 曲线 C_1 与坐标轴交于 (异于坐标原点 O) 两点 M, N .

(Ⅰ)求线段 MN 的长度;

(II) 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 已知点 M, N 关于直线 l 对称, 求直线 l 的极坐标方程.

23. (本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲:

已知函数 $f(x) = |2x-1| + |2x+a|$, $g(x) = x+3$.

(I) 当 $a = -2$ 时, 求不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集;

(II) 设 $a > -1$, 且当 $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) \leq g(x)$, 求 a 的取值范围.