

## 理科数学参考答案

## 一、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 答案 | B | D | A | C | D | D | A | B | C | C  | A  | B  |

1. B 【解析】由已知  $A = \{x | -1 < x < 3\}$ , 则  $t = 2x + 1 \in (-1, 7)$ , 所以  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 所以  $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ , 故选 B.

2. D 【解析】 $\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ , 故选 D.

3. A 【解析】因为  $a \perp c$ , 所以  $a \cdot c = a \cdot (\lambda a - \mu b) = 0$ , 可得  $\lambda + \frac{\mu}{2} = 0$ , 即  $2\lambda + \mu = 0$ . 故选 A.

4. C 【解析】由对称性可知: 点  $D$  的坐标为  $(4, 4)$  或  $(4, -4)$ , 代入抛物线  $y^2 = 2px$ , 解得  $p = 2$ , 所以抛物线方程为:  $y^2 = 4x$ , 它的焦点坐标为  $(1, 0)$ , 故选 C.

6. D 【解析】 $\therefore \frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2\sin A \cos A}{\sin C} = \frac{2a}{c} \cos A = \frac{4}{3} \cdot \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ , 故选 D.

7. A 【解析】由已知中的三视图可得: 此棱锥  $ABCD$  的直观图如下图所示:

$\triangle ABD$  和  $\triangle CBD$  都是直角边为 2 和  $2\sqrt{2}$  的直角三角形,  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADC$  均是边长为 2 的等腰直角三角形, 所以其表面积为  $S = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times 2^2 = 4 + 4\sqrt{2}$ . 故选 A.

8. B 【解析】因为  $\alpha \in (0, \pi)$ ,  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$ , 得  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$ , 所以

$$\sin \alpha = \sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}.$$

故选 B.

9. C 【解析】由题意可得,  $\frac{1}{2} = 1 \times e^{-7.6 \times 0.8\mu}$ ,  $\therefore -\ln 2 = -7.6 \times 0.8\mu$ ,

即  $6.08\mu = 0.6931$ , 则  $\mu \approx 0.114$ .  $\therefore$  这种射线的吸收系数为 0.114. 故选 C.

10. C 【解析】设直线  $l$  的方程为  $y = kx + b$ , 切点为  $P$ , 由题设可知,  $\angle PAO = \angle POA = 45^\circ$ , 所以  $b = \sqrt{2}$ , 因为直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切, 所以  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}} = 1$ , 得  $k = \pm 1$ .

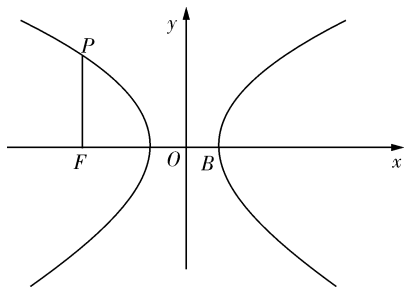
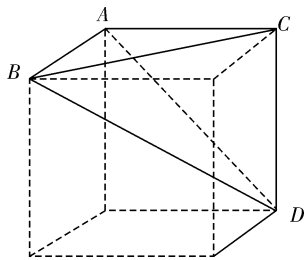
故直线  $l$  的方程为  $y = \pm x + \sqrt{2}$ , 故选 C.

11. A 【解析】如下图: 设双曲线  $C$  的半实轴、半虚轴、半焦距分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,

$$\text{由已知可得 } |PF| = \frac{b^2}{a}, |BF| = a + c,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a} = 2(a + c), \text{ 即 } 2a^2 + 2ac = c^2 - a^2,$$

化简得  $e^2 - 2e - 3 = 0$ , 得  $e = 3$ , 故选 A.



12. B 【解析】由  $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$  得  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + x - 1 = (x-1)\left(\frac{e^x}{x^2} + 1\right)$ ,

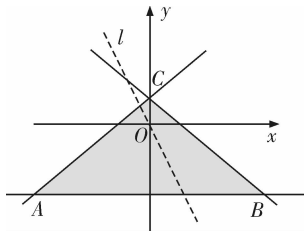
所以函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增. 因为  $1 < 2^{0.3} < 2, \log_2 5 > \log_2 4 = 2$ ,

所以  $2^{0.3} < 2 < \log_2 5$ , 所以  $f(2^{0.3}) < f(2) < f(\log_2 5)$ , 即  $a < b < c$ , 故选 B.

## 二、填空题

13. -15 【解析】根据约束条件  $\begin{cases} 2x+3y-3 \leq 0 \\ 2x-3y+3 \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$  画出可行域(图中阴影部分), 作

直线  $l: 2x+y=0$ , 平移直线  $l$ , 将直线平移到点 A 处  $z$  最小, 点 A 的坐标为  $(-6, -3)$ , 将点 A 的坐标代入目标函数  $z=2x+y$ , 可得  $z=-15$ , 即  $z_{\min} = -15$ .



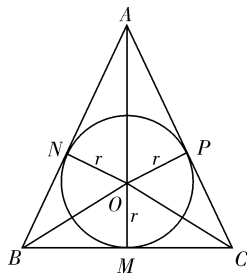
14. 242 【解析】令  $x=1$  代入可得,  $a+b+c+d+e=(1+2)^5-1^5=3^5-1=242$ .

15.  $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$  【解析】易知半径最大球为圆锥的内切球, 球与圆锥内切时的轴截面如图所示

示, 点 M 为 BC 边上的中点, 由题设  $BC=2, AM=2\sqrt{2}$ , 求得  $AB=AC=3$ , 设内切圆的圆心为 O,

故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ , 设内切圆半径为  $r$ , 则:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times AB \times r + \frac{1}{2} \times BC \times r + \frac{1}{2} \times AC \times r \\ &= \frac{1}{2} \times (3+3+2) \times r = 2\sqrt{2}, \text{解得: } r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{其体积: } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi. \end{aligned}$$



16.  $[1, 4]$  【解析】由  $f(-x) = \sin(-x) + 2(-x) - \left(\frac{1}{-x}\right) = -\sin x - 2x + \frac{1}{x} = -f(x)$  可知,

函数  $f(x)$  为奇函数,  $f'(x) = \cos x + 2 + \frac{1}{x^2} > 0$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数,

由  $f(1-3a) + f(a^2-2a+3) \leq 0$  得  $f(a^2-2a+3) \leq -f(1-3a)$ ,

即  $f(a^2-2a+3) \leq f(3a-1)$ , 因为  $a > \frac{1}{3}$  时,  $3a-1 > 0, a^2-2a+3 > 0$ , 所以等价于  $a^2-2a+3 \leq 3a-1$ , 解得  $1 \leq a \leq 4$ .

## 三、解答题

17. 【解析】(I) 由题意可得  $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1 = 3, a_3 = 2a_2 - 1 = 6 - 1 = 5$ ,

由数列  $\{a_n\}$  的前三项可猜想数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列,

即  $a_n = 2n - 1$ , ..... (2 分)

证明如下:

当  $n=1$  时,  $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$  成立;

假设  $n=k$  时,  $a_k = 2k - 1$  成立.

那么  $n=k+1$  时,  $a_{k+1} = 2a_k - (2k-3) = 2(2k-1) - (2k-3) = 2k+1 = 2(k+1) - 1$  也成立.

则对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $a_n = 2n - 1$  成立; ..... (6 分)

(II) 因为  $b_n = (2n-1)2^n$ .

$\therefore S_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \times 2^n$ , ①

$2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \cdots + (2n-1) \times 2^{n+1}$ , ②

①-②得:  $-S_n = 2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \cdots + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^{n+1}$

$$=2+\frac{2 \times 2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1) \times 2^{n+1}=-6-(2n-3) \times 2^{n+1}.$$

$$\therefore S_n=(2n-3) \times 2^{n+1}+6. \quad \cdots \cdots (12 \text{ 分})$$

18.【解析】(I)  $(0.005+p+0.018+0.020+0.022+0.025) \times 10=1$ , 解得:  $p=0.01$ ,

$$\text{所以 } n=\frac{10}{0.1}=100. \quad \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

(II) 因为  $n=100$ , 所以“读书之星”有  $100 \times 0.25=25$ ,

从而  $2 \times 2$  列联表如下图所示:

|    | 非读书之星 | 读书之星 | 总计  |
|----|-------|------|-----|
| 男  | 30    | 15   | 45  |
| 女  | 45    | 10   | 55  |
| 总计 | 75    | 25   | 100 |

$$\text{将 } 2 \times 2 \text{ 列联表中的数据代入公式计算得 } K^2=\frac{100 \times (30 \times 10-15 \times 45)^2}{45 \times 55 \times 75 \times 25} \approx 3.030,$$

因为  $3.030 < 3.841$ , 所以没有 95% 以上的把握认为“读书之星”与性别有关.  $\cdots \cdots (8 \text{ 分})$

(III) 将频率视为概率, 即从该地区学生中抽取一名学生是“读书之星”的概率为  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{由题意可知 } X \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right), \text{ 所以 } E(X)=20 \times \frac{1}{4}=5(\text{人}). \quad \cdots \cdots (12 \text{ 分})$$

19.【解析】(I) 证明: 连接  $DG, FG$ , 因为点  $E, F$  在侧棱  $BB_1, CC_1$  上, 且  $B_1E=2EB, C_1F=2FC$ ,

又  $BB_1 // CC_1$  且  $BB_1=CC_1$ , 所以  $EB // FC$  且  $EB=FC$ ,

所以四边形  $BCFE$  为平行四边形, 所以  $EF // BC$ ,

又因为点  $D, G$  在侧棱  $AB, AC$  上, 且  $BD=2DA, CG=2GA$ ,

所以  $GD // BC$ , 且  $GD=\frac{1}{3}BC$ ,

所以  $EF // GD$  且  $GD=\frac{1}{3}EF$ , 故四边形  $DEFG$  为梯形.

即  $D, E, F, G$  四点共面, 所以点  $G$  在平面  $EFD$  内.  $\cdots \cdots (6 \text{ 分})$

(II) 由题设知:  $A_1B_1, A_1C_1, A_1A$  两两垂直, 以  $A_1C_1$  为  $x$  轴,  $A_1A$  为  $y$  轴,  $A_1B_1$  为  $z$  轴, 建立空间直角坐标系  $A_1-xyz$ .

由  $AB=AC=1, AA_1=2$ , 得  $A_1(0,0,0), A(0,2,0), B_1(0,0,1), C_1(1,0,0)$ .

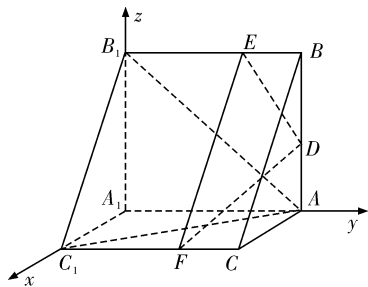
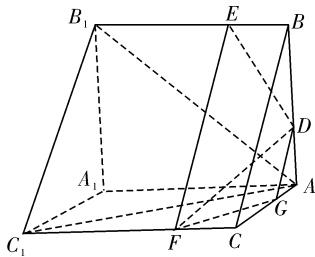
设平面  $AB_1C_1$  的法向量为  $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$ , 因为  $\overrightarrow{AC_1}=(1,-2,0), \overrightarrow{B_1C_1}=(1,0,-1)$ ,

$$\text{所以 } \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC_1}=x-2y=0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}=x-z=0 \end{cases}, \text{ 取 } y=1, \text{ 则 } x=z=2, \text{ 所以 } \boldsymbol{n}=(2,1,2).$$

又  $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$  是平面  $AA_1B_1$  的一个法向量, 所以  $\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle =$

$$\frac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3},$$

即二面角  $A_1-AB_1-C_1$  的余弦值为  $\frac{2}{3}$ .  $\cdots \cdots (12 \text{ 分})$



20.【解析】(I)由椭圆的定义及 $|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{2}$ ,得 $2a=4\sqrt{2}$ ,即 $a=2\sqrt{2}$ .

设椭圆半焦距为 $c$ ,因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,所以 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{6}$ ,

$b^2=a^2-c^2=2$ ,

所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ . ..... (5分)

(II)由(I)得 $P(2,1)$ ,所以 $k_{OP}=\frac{1}{2}$ ,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ,直线 $l$ 的方程 $y=\frac{1}{2}x+t(t\neq0)$ ,

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+t \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$  消去 $y$ 整理可得 $2x^2+4tx+4t^2-8=0$ ,

由 $\Delta=16t^2-4\cdot2\cdot(4t^2-8)>0$ ,又 $t\neq0$ ,则 $0<t^2<4$ ,且 $x_1+x_2=-2t, x_1x_2=2t^2-4$ , ..... (7分)

所以弦长 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}$ ,

$P$ 到直线 $AB$ 的距离为 $d$ ,则 $d=\frac{|\frac{1}{2}\cdot2+ t|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2|t|}{\sqrt{5}}$ , ..... (9分)

设 $Q$ 到直线 $AB$ 的距离为 $d'$ ,由 $3\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DQ}$ 得 $3|PD|=|DQ|$ ,所以 $d'=3d$ ,

所以 $S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}d'|AB|=\frac{1}{2}\cdot3d|AB|=3S_{\triangle PAB}$ ,

所以 $S_{PAQB}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle QAB}=4S_{\triangle PAB}=2d|AB|=2\cdot\frac{2|t|}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}=4\sqrt{-(t^2-2)^2+4}\leq8$ ,

当且仅当 $t^2=2$ 时取等号,所以四边形 $PAQB$ 面积的最大值为 $8$ . ..... (12分)

21.【解析】(I)由 $f(x)=-(x-2)e^x+(x-1)^2$ ,

得 $f'(x)=-(x-1)e^x+2(x-1)=(x-1)(-e^x+2)$ . ..... (1分)

由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln 2$ ,

当 $x\in(-\infty,\ln 2),f'(x)<0$ ,函数 $f(x)$ 单调递减;

$x\in(\ln 2,1),f'(x)>0$ ,函数 $f(x)$ 单调递增;

$x\in(1,+\infty),f'(x)<0$ ,函数 $f(x)$ 单调递减. .... (6分)

(II) $f'(x)=a(x-1)e^x+2(x-1)=(x-1)(ae^x+2)$ ,

当 $a>0$ 时, $ae^x+2>0$ ,由 $f'(x)<0$ 得 $x<1$ ,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数,由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$ ,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数,

而 $f(1)=-ae<0,f(2)=1>0$ ,

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点,且该零点在 $(1,2)$ 上.

取 $b<0$ ,且 $b<\ln\frac{1}{2a}$ ,

则 $f(b)=a(b-2)e^b+(b-1)^2>\frac{1}{2}(b-2)+(b-1)^2=b(b-\frac{3}{2})>0$ .

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有唯一零点,且该零点在 $(b,1)$ 上,

所以 $a>0$ 时, $f(x)$ 恰好有两个零点. .... (12分)

22.【解析】(I)由曲线 $C_1$ 的参数方程为: $\begin{cases} x=-1+2\cos\alpha \\ y=-\sqrt{3}+2\sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$ 为参数)得 $\begin{cases} x+1=2\cos\alpha \\ y+\sqrt{3}=2\sin\alpha \end{cases}$  消去 $\alpha$ 得曲线 $C_1$ 为圆

$(x+1)^2+(y+\sqrt{3})^2=4$ ,圆心为 $O_1(-1,-\sqrt{3})$ ,半径为 $2$ ,

由  $\angle MON = \frac{\pi}{2}$ , 可知  $MN$  为圆  $C_1$  的直径, 所以  $|MN| = 4$ . ..... (5 分)

(II) 由点  $M, N$  关于直线  $l$  对称且  $MN$  为圆  $C_1$  的直径可知, 直线  $l$  过点  $O_1(-1, -\sqrt{3})$ ,

又  $k_{MN} = -\sqrt{3}$ , 得  $k_l = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

所以直线  $l$  的直角坐标方程为  $y + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$ , 即  $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ ,

将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ,

代入得直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta - 2 = 0$ . ..... (10 分)

23. 【解析】(I) 当  $a = -2$  时, 不等式  $f(x) < g(x)$  化为  $|2x - 1| + |2x - 2| - x - 3 < 0$ .

$$\text{设函数 } y = |2x - 1| + |2x - 2| - x - 3, \text{ 则 } y = \begin{cases} -5x, & x < \frac{1}{2}, \\ -x - 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 3x - 6, & x > 1. \end{cases}$$

则当  $x < \frac{1}{2}$  时,  $-5x < 0$  得  $0 < x < \frac{1}{2}$ ;

当  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  时,  $-x - 2 < 0$  得  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ;

当  $x > 1$  时,  $3x - 6 < 0$  得  $1 < x < 2$ ;

综上可得  $0 < x < 2$ .

所以原不等式的解集是  $\{x | 0 < x < 2\}$ . ..... (5 分)

(II) 当  $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$  时,  $f(x) = 1 + a$ . 不等式  $f(x) \leq g(x)$  化为  $1 + a \leq x + 3$ .

所以  $x \geq a - 2$ ,

对  $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$  都成立.

故  $-\frac{a}{2} \geq a - 2$ , 即  $a \leq \frac{4}{3}$ .

故  $a$  的取值范围是  $\left(-1, \frac{4}{3}\right]$ . ..... (10 分)