

文科数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	C	B	A	C	D	B	C	D	A

1. B 【解析】 $\because A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}, B = \{x | 3 < x < 15\}$,

$\therefore A \cap B = \{5, 7, 11\}$, $\therefore A \cap B$ 中元素的个数为 3. 故选 B.

2. D 【解析】 $\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 故选 D.

3. D

4. C 【解析】由题意可得, $\frac{1}{2} = 1 \times e^{-7.6 \times 0.8\mu}$, $\therefore -\ln 2 = -7.6 \times 0.8\mu$,

即 $6.08\mu \approx 0.6931$, 则 $\mu \approx 0.114$. $\therefore$ 这种射线的吸收系数为 0.114. 故选 C.

5. B 【解析】 $\because \sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = 1$,

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 所以 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 B.

6. A 【解析】不妨设 $A(-a, 0), B(a, 0)$, 设 $C(x, y)$,

因为 $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = -1$, 所以 $(x+a, y) \cdot (x-a, y) = -1$, 解得 $x^2 + y^2 = a^2 - 1 > 0$,

所以点 C 的轨迹为圆. 故选 A.

7. C 【解析】由对称性可知: 点 D 的坐标为 $(4, 4)$ 或 $(4, -4)$, 代入抛物线 $y^2 = 2px$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线方程为: $y^2 = 4x$, 它的焦点坐标为 $(1, 0)$. 故选 C.

8. D 【解析】直线 $y = k(x+1) + 1$ 过定点 $B(-1, 1)$, 当 $AB \perp l$ 时, 距离最大为 $\sqrt{5}$, 故选 D.

9. B 【解析】该几何体为四棱锥体. 所以 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$. 故选 B.

10. C 【解析】 $\because c = \frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3 = a$

又 $c = \frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 3\sqrt{3} > \log_3 5 = b$, $\therefore a > c > b$. 故选 C.

11. D 【解析】 $\because \frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C} = \frac{2a}{c} \cos A = \frac{4}{3} \cdot \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$, 故选 D.

12. A 【解析】由题意可求: $a = 1$, 所以函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 + \frac{-2}{2^x + 1}$ 且在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

不等式 $f(x \sin x - 1) + f(\cos x - b) \leq 0$ 恒成立, 等价于 $f(x \sin x - 1) \leq -f(\cos x - b)$,

得 $f(x \sin x - 1) \leq f(b - \cos x)$, 即 $x \sin x + \cos x \leq b + 1$,

令 $g(x) = x \sin x + \cos x$, $g'(x) = x \cos x$,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

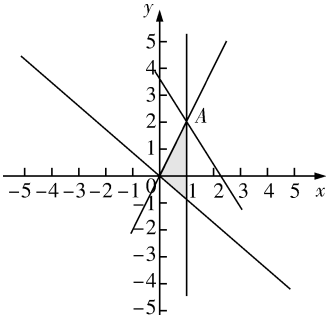
故当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x)$ 取极大值也是最大值, 最大值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$,

所以 $b + 1 \geq \frac{\pi}{2}$, 得 $b \geq \frac{\pi}{2} - 1$. 又 $b \in \mathbf{Z}$, 则 $b_{\min} = 1$.

二、填空题

13. 10 【解析】先根据约束条件画出可行域, 由 $\begin{cases} x=1, \\ 2x-y=0, \end{cases}$ 解得 $A(1, 2)$,

如图,当直线 $z=4x+3y$ 过点 $A(1,2)$ 时,目标函数在 y 轴上的截距取得最大值时,此时 z 取得最大值,即当 $x=1, y=2$ 时, $z_{\max}=4\times 1+3\times 2=10$. 故答案为 10.



14. $y=\pm\sqrt{2}x$ 【解析】由双曲线的方程可得渐近线的方程为: $y=\pm\frac{b}{a}x$,

由题意离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$, 可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$, 所以渐近线的方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$, 故答案为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

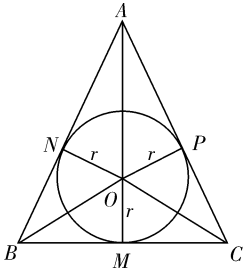
15. 1 【解析】 $\because f(x)=\frac{e^x}{x+a}, \therefore f'(x)=\frac{(x+a-1)\cdot e^x}{(x+a)^2}$,

依题意: $f'(1)=\frac{ae}{(a+1)^2}=\frac{e}{4}, \therefore \frac{a}{(a+1)^2}=\frac{1}{4}$, 则 $a=1$, 故答案为 1.

16. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】易知半径最大球为圆锥的内切球, 球与圆锥内切时的轴截面如图所示, 点 M 为 BC 边上的中点, 由题设 $BC=2, AM=2\sqrt{2}$, 求得 $AB=AC=3$, 设内切圆的圆心为 O ,

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, 设内切圆半径为 r , 则:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}\times AB\times r + \frac{1}{2}\times BC\times r + \frac{1}{2}\times AC\times r \\ &= \frac{1}{2}\times (3+3+2)\times r = 2\sqrt{2}, \text{解得: } r=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{其体积: } V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$



三、解答题

17. 【解析】(1) 设公比为 q , 依题意 $q\neq 1$ 且 $q>0$, 由已知 $\begin{cases} a_1(1+q)=3, \\ a_1(q^2-q)=2, \end{cases}$ 可得 $a_1=1, q=2$,

所以 $a_n=2^{n-1}$ (6 分)

(2) 由(1)有 $b_n=4-\log_2 a_n=5-n$, 所以 $\{b_n\}$ 是一个以 4 为首项, -1 为公差的等差数列, (8 分)

所以 $S_n=\frac{n(9-n)}{2}$ (10 分)

于是 $S_n\geq b_n$ 等价于 $n^2-11n+10\leq 0$, 解得 $1\leq n\leq 10$.

所以 n 的取值范围是 $\{n|1\leq n\leq 10, n\in\mathbf{N}\}$ (12 分)

18. 【解析】(1) $(0.005+p+0.018+0.020+0.022+0.025)\times 10=1$, 解得: $p=0.01$,

所以 $n=\frac{10}{0.1}=100$ (4 分)

(2) 因为 $n=100$, 所以“读书之星”有 $100\times 0.25=25$, (6 分)

从而 2×2 列联表如下图所示:

	非读书之星	读书之星	总计
男	30	15	45
女	45	10	55
总计	75	25	100

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算得 $K^2 = \frac{100 \times (30 \times 10 - 15 \times 45)^2}{45 \times 55 \times 75 \times 25} \approx 3.030$,

因为 $3.030 < 3.841$, 所以没有 95% 以上的把握认为“读书之星”与性别有关. (12 分)

19. 【解析】(1) 证明: 连接 DG 、 FG , 因为点 E 、 F 在侧棱 BB_1 、 CC_1 上, 且 $B_1E = 2EB$, $C_1F = 2FC$,

又 $BB_1 \parallel CC_1$ 且 $BB_1 = CC_1$, 所以 $EB \parallel FC$ 且 $EB = FC$,

所以四边形 $BCFE$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel BC$,

又因为点 D 、 G 在侧棱 AB 、 AC 上, 且 $BD = 2DA$, $CG = 2GA$,

所以 $GD \parallel BC$, 且 $GD = \frac{1}{3}BC$,

所以 $EF \parallel GD$ 且 $GD = \frac{1}{3}EF$, 故四边形 $DEFG$ 为梯形.

即 D 、 E 、 F 、 G 四点共面, 所以点 G 在平面 EFD 内. (6 分)

(2) 由题设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱知: AB 、 AC 、 A_1A 两两垂直, 所以 $C_1C \perp$ 平面 ABC , F 为 C_1C 上一点, 所以点 F 在平面 ABC 上的射影为点 C , 连结 CD , 则 $\angle FDC$ 即为直线 DF 与平面 ABC 所成角, $\tan \angle FDC = \frac{CF}{CD}$ (9 分)

因为点 D 在棱 AB 上且 $BD = 2DA$, 所以 $DA = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}$, 因为点 C 在棱 CC_1 上且 $C_1F = 2FC$, 所以 $FC = \frac{1}{3}CC_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{2}{3}$, 因为 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $DC =$

$\sqrt{(DA)^2 + (AC)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\tan \angle FDC = \frac{CF}{CD} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 所以直线 DF 与平

面 ABC 所成角的正切值是 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (12 分)

20. 【解析】(1) $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 2x(3x - a)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{a}{3}$ (2 分)

若 $a > 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{a}{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (0, \frac{a}{3})$ 时, $f'(x) < 0$ (3 分)

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(0, \frac{a}{3})$ 单调递减;

所以函数的递增区间是 $(-\infty, 0)$, $(\frac{a}{3}, +\infty)$; 递减区间是 $(0, \frac{a}{3})$ (4 分)

(2) (i) 若 $a = 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增; (5 分)

若 $a < 0$, 则当 $x \in (-\infty, \frac{a}{3}) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{a}{3}, 0)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{3})$, $(0, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{a}{3}, 0)$ 单调递减. (6 分)

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

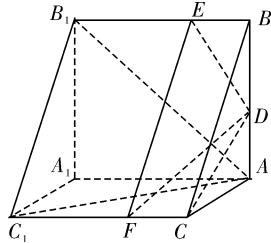
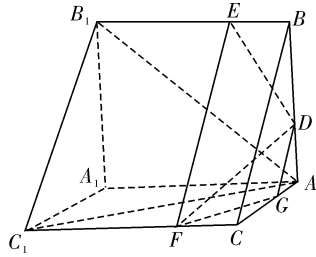
所以 $f(x)$ 至多一个零点. (8 分)

(ii) 当 $a > 0$ 时, 由 (1) 知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{a}{3})$ 上单调递减,

又 $f(0) = a > 0$, $f(a) = a^3 + a > 0$,

所以要使 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, 则 $\begin{cases} a > 0, \\ f(\frac{a}{3}) < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 3\sqrt{3}$.

所以 a 的取值范围为 $a > 3\sqrt{3}$ (12 分)



21.【解析】(1)由椭圆的定义及 $|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{2}$,得 $2a=4\sqrt{2}$,即 $a=2\sqrt{2}$.

设椭圆半焦距为 c ,因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{6}$,

$b^2=a^2-c^2=2$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. (5分)

(2)由(1)得 $P(2,1)$,所以 $k_{OP}=\frac{1}{2}$,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,直线 l 的方程 $y=\frac{1}{2}x+t(t\neq 0)$,

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+t \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 y 整理可得 $2x^2+4tx+4t^2-8=0$,

由 $\Delta=16t^2-4\cdot 2\cdot (4t^2-8)>0$,又 $t\neq 0$,则 $0<t^2<4$,且 $x_1+x_2=-2t, x_1x_2=2t^2-4$, (7分)

所以弦长 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}$,

P 到直线 AB 的距离为 d ,则 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2|t|}{\sqrt{5}}$, (9分)

设 Q 到直线 AB 的距离为 d' ,由 $3\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DQ}$ 得 $3|PD|=|DQ|$,所以 $d'=3d$,

所以 $S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}d'|AB|=\frac{1}{2}\cdot 3d|AB|=3S_{\triangle PAB}$,

所以 $S_{PAQB}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle QAB}=4S_{\triangle PAB}=2d|AB|=2\cdot \frac{2|t|}{\sqrt{5}}\cdot \sqrt{5}\sqrt{4-t^2}=4\sqrt{-(t^2-2)^2+4}\leq 8$,

当且仅当 $t^2=2$ 时取等号,所以四边形 $PAQB$ 面积的最大值为8. (12分)

22.【解析】(1)由曲线 C_1 的参数方程为: $\begin{cases} x=-1+2\cos\alpha \\ y=-\sqrt{3}+2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)得 $\begin{cases} x+1=2\cos\alpha \\ y+\sqrt{3}=2\sin\alpha \end{cases}$ 消去 α 得曲线 C_1 为圆

$(x+1)^2+(y+\sqrt{3})^2=4$,圆心为 $O_1(-1, -\sqrt{3})$,半径为2,

由 $\angle MON=\frac{\pi}{2}$,可知 MN 为圆 C_1 的直径,所以 $|MN|=4$. (5分)

(2)由点 M, N 关于直线 l 对称且 MN 为圆 C_1 的直径可知,直线 l 过点 $O_1(-1, -\sqrt{3})$,

又 $k_{MN}=-\sqrt{3}$,得 $k_l=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$,即 $x-\sqrt{3}y-2=0$,

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

代入得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-2=0$. (10分)

23.【解析】(1)当 $a=-2$ 时,不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$.

设函数 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$,则 $y=\begin{cases} -5x, & x<\frac{1}{2}, \\ -x-2, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1, \\ 3x-6, & x>1. \end{cases}$

则当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $-5x<0$ 得 $0<x<\frac{1}{2}$;当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ 时, $-x-2<0$ 得 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$;

当 $x>1$ 时, $3x-6<0$ 得 $1<x<2$;综上可得 $0<x<2$.

所以原不等式的解集是 $\{x|0<x<2\}$. (5分)

(2)当 $x\in\left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)=1+a$.不等式 $f(x)\leq g(x)$ 化为 $1+a\leq x+3$.

所以 $x\geq a-2$,对 $x\in\left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 都成立.

故 $-\frac{a}{2}\geq a-2$,即 $a\leq \frac{4}{3}$.

故 a 的取值范围是 $\left(-1, \frac{4}{3}\right]$. (10分)