

广州市 2021 届高三年级阶段训练

数学

本试卷共 5 页, 22 小题, 满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项: 1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | x \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 的子集个数为

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

2. 已知复数 $z = 1 + 2i$, 则 $|z^2| =$

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. 5

3. 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 若 $a_2 = 5$, $a_1 a_3 = 16$, 则 $a_{12} =$

- A. 12 B. 35 C. 75 D. 90

4. 中国古代数学名著《九章算术》中有这样一个问题:“今有牛、马、羊食人苗。苗主责之粟五斗。羊主曰:‘我羊食半马。’马主曰:‘我马食半牛。’今欲衰偿之, 问各出几何?”翻译过来就是: 现有牛、马、羊吃了人家的田里的青苗, 青苗主人要求三畜的主人一共赔偿粟米 5 斗。羊主人说:“我的羊所吃数是马的一半。”马主人说:“我的马所吃数是牛的一半。”现在按照三畜所吃青苗数的比例进行分配赔偿, 问牛、马、羊的主人赔偿粟米斗数分别为

- A. $\frac{20}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7}$ B. $\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{20}{7}$ C. $\frac{20}{7}, \frac{5}{7}, \frac{10}{7}$ D. $\frac{10}{7}, \frac{5}{7}, \frac{20}{7}$

5. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + a$,

则 $g(2) =$

- A. -4 B. 4 C. -8 D. 8

6. 某学校鼓励学生参加社区服务, 学生甲 2019 年每月参加社区服务的时长 (单位: 小时) 分别为 $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, 其均值和方差分别为 $\bar{x}$ 和 s^2 , 若 2020 年甲每月参加社区服务的时长增加 1 小时, 则 2020 年甲参加社区服务时长的均值和方差分别为

- A. $\bar{x}, s^2$ B. $1+\bar{x}, 1+s^2$ C. $\bar{x}, 1+s^2$ D. $1+\bar{x}, s^2$

7. $\left(ax - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 160, 则 a 的值为

- A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

8. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = CC_1 = \sqrt{2}$, $BC = 1$, 点 M 在正方形 CDD_1C_1 内, $C_1M \perp$ 平面 A_1CM , 则三棱锥 $M - A_1CC_1$ 的外接球表面积为

- A. $\frac{11}{2}\pi$ B. 7π C. 11π D. 14π

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 以下四个命题中, 真命题的是

- A. 若 $p \vee q$ 为真命题, 则 p, q 均为真命题
 B. “ $x > 2$ ”是“ $\lg(3-x) < 0$ ”的必要不充分条件
 C. 若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$
 D. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 < ab < b^2$

10. 已知 P 是双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 右支上一点, F_1, F_2 分别是 C 的左, 右焦点, O 为坐标原点, $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF_1}| = \frac{9}{4}$, 则

- A. C 的离心率为 $\frac{5}{4}$ B. C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$
 C. 点 P 到 C 的左焦点距离是 $\frac{23}{4}$ D. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{45}{4}$

11. 已知函数 $f(x) = |\sin x - \cos x|(\sin x + \cos x), x \in \mathbf{R}$, 则

- A. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增 B. $f(x)$ 是周期函数, 且周期为 2π
 C. $f(x)$ 有对称轴 D. 函数 $g(x) = f(x) + 1$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上有且仅有一个零点

12. 已知直线 $y = -x + 2$ 分别与函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 和 $y = \ln(2x)$ 的图象交于点 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 则

A. $e^{x_1} + e^{x_2} > 2e$ B. $x_1 x_2 > \frac{\sqrt{e}}{4}$ C. $\frac{\ln x_1}{x_1} + x_2 \ln x_2 > 0$ D. $e^{x_1} + \ln(2x_2) > 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 e_1, e_2 是互相垂直的单位向量, 若 $\sqrt{3}e_1 - e_2$ 与 $e_1 + \lambda e_2$ 的夹角为 90° , 则实数 λ 的值是_____.

14. 函数 $f(x) = x \sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为_____.

15. 广东省 2021 年的新高考按照“3+1+2”的模式设置, “3”为全国统一高考的语文、数学、外语 3 门必考科目; “1”由考生在物理、历史 2 门中选考 1 门科目; “2”由考生在思想政治、地理、化学、生物学 4 门中选考 2 门科目. 则甲、乙两名考生在选考科目中恰有两门科目相同的方法数为_____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 以线段 AB 为直径的圆交 y 轴于 M, N 两点, 设线段 AB 的中点为 Q , 若点 F 到 C 的准线的距离为 3, 则 $\sin \angle QMN$ 的值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $a \cos B = b \sin A$, ② $b^2 + \sqrt{2}ac = a^2 + c^2$, ③ $\sin B + \cos B = \sqrt{2}$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解决该问题.

问题: 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , _____, $\triangle ABC$ 的面积为 2, $a = 2$, 求 b .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = 3n^2 - n$, 数列 $\{\log_3 b_n\}$ 是公差为 -1 的等差数列, $b_1 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = a_{2n+1} + b_{2n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分)

某学校高三年级数学备课组的老师为了了解新高三年级学生在假期的自学情况,在开学初进行了一次摸底测试,根据测试成绩评定“优秀”、“良好”、“要加油”三个等级,同时对相应等级进行量化:“优秀”记10分,“良好”记5分,“要加油”记0分.现随机抽取年级120名学生的成绩,统计结果如下所示:

等级	优秀	良好	要加油
得分	$[120,150]$	$[90,120)$	$[0,90)$
频数	12	72	36

(1) 若测试分数90分及以上认定为优良.分数段在 $[120,150]$, $[90,120)$, $[0,90)$ 内女生的人数分别为4人, 40人, 20人,完成下面的 2×2 列联表,并判断:是否有95%以上的把握认为性别与数学成绩优良有关?

是否优良 性别	优良	非优良	总计
男生			
女生			
总计			

(2) 用分层抽样的方法,从评定为“优秀”、“良好”、“要加油”的三个等级的学生中选取10人进行座谈,现再从这10人中任选2人,所选2人的量化分之和记为 X ,求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

附表及公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

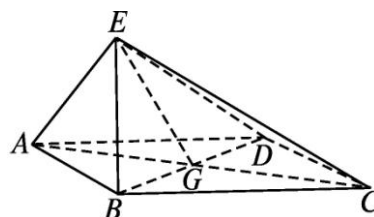
20. (12分)

如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, G 为 AC 与 BD 的交点.

(1) 证明:平面 $AEC \perp$ 平面 BED ;

(2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, $AE \perp EC$,

求直线 EG 与平面 EDC 所成角的正弦值.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且两焦点与短轴的两个端点的

连线构成一正方形.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆 C 的右焦点 F 的直线 l (与 x 轴不重合) 与椭圆 C 交于 M, N 两点. 是否存在一定点 $E(t, 0)$, 使得 x 轴上的任意一点 (异于点 E, F) 到直线 EM, EN 的距离相等? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x+a)\ln x - \frac{1}{2}x^2 - ax + a - 1$.

(1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x) > a \ln x - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 求整数 a 的最大值.