广州市2021届高三年级阶段训练

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	B	A	C	D	A	C

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9. BC　　10. AD　　11. BCD　　12. ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. $\sqrt{3}$　　14. $x-y=0$　　15. 60　　16. $\dfrac{5}{8}$

四、解答题：本题共6小题，共70分．

17.（10分）

解：若选择① $a\cos B=b\sin A$，由正弦定理得 $\sin A\cos B=\sin B\sin A$．　…………1分

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos B=\sin B,\tan B=1$．　…………3分

因为 $B\in(0,\pi)$，　…………4分

所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$．　…………5分

若选择② $b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．　…………3分

因为 $B\in(0,\pi)$，　…………4分

所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$．　…………5分

若选择③ $\sin B+\cos B=\sqrt{2}$，由和角公式得 $\sqrt{2}\sin(B+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，…………2分

所以 $\sin(B+\dfrac{\pi}{4})=1$．　…………3分

因为$B\in(0,\pi)$，则$B+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$, ……………………………………4 分

所以$B+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

所以$B=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………5 分

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2$， ……………………………………………………6 分

因为$a=2$，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$c=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………7 分

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+8-8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$， ……………………9 分

所以$b=2$. ……………………………………………10 分

18. (12 分)

（1）解：因为$2S_n=3n^2-n$， ①

当$n\geq 2$时，$2S_{n-1}=3(n-1)^2-(n-1)$，② ………………………………………1 分

①-②得$2a_n=6n-4$，

所以$a_n=3n-2(n\geq 2)$. ……………………………………………………2 分

当$n=1$时，$2S_1=2$，所以$a_1=S_1=1$满足上式. ……………………………………3 分

所以$a_n=3n-2$. ……………………………………………………4 分

因为数列$\{\log_3 b_n\}$是公差为-1的等差数列，首项为$\log_3 b_1=\log_3 1=0$，

所以$\log_3 b_n=1-n$. ……………………………………………………5 分

所以$b_n=3^{1-n}$，即$b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. ……………………………………………………6 分

（2）解：$c_n=a_{2n+1}+b_{2n+1}=6n+1+\left(\frac{1}{9}\right)^n$. ……………………………………8 分

所以$T_n=\dfrac{n\left(7+6n+1\right)}{2}+\dfrac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}$ ……………………………………………………10 分

$=3n^2+4n+\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{9^n}\right).$ ……………………………………………………12 分

19. (12 分)

（1）**解**：依题意，完成下面的2×2列联表：

性别 \ 是否优良	优良	非优良	总计
男生	40	16	56
女生	44	20	64
总计	84	36	120

……………………………………………………2 分

$K^2=\dfrac{120\times(16\times44-40\times20)^2}{36\times84\times56\times64}\approx0.102<3.841.$ ……………………………………4 分

故没有95 %以上的把握认为性别与数学成绩优良有关. ……………………………5 分

（2）**解**：按照分层抽样，评定为“优秀”、“良好”、“要加油”三个等级的学生分别抽取1人，6人，3人. 现再从这10人中任选2人，所选2人的量化分之和X的可能取值为15，10，5，0. ……………………………………………………6 分

$P\left(X=15\right)=\dfrac{C_1^1C_6^1}{C_{10}^2}=\dfrac{1\times6}{45}=\dfrac{2}{15}$，　$P\left(X=10\right)=\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}+\dfrac{C_1^1C_3^1}{C_{10}^2}=\dfrac{18}{45}=\dfrac{6}{15}$，

$P\left(X=5\right)=\dfrac{C_6^1C_3^1}{C_{10}^2}=\dfrac{18}{45}=\dfrac{6}{15}$，　$P\left(X=0\right)=\dfrac{C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{3}{45}=\dfrac{1}{15}$，

……………………………………………………10 分

所以X的分布列为：

X	15	10	5	0
P	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{6}{15}$	$\dfrac{6}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

……………………………………11 分

所以$E\left(X\right)=15\times\dfrac{2}{15}+10\times\dfrac{6}{15}+5\times\dfrac{6}{15}+0\times\dfrac{1}{15}=8$. ……………………………………12 分

20. (12 分)

（1）证明：因为四边形 $ABCD$ 为菱形， 所以 $AC\perp BD$. ………………………………1 分

因为 $BE\perp$平面 $ABCD$， $AC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $AC\perp BE$. ………………………………2 分

又 $BE\cap BD=B$，所以 $AC\perp$平面 BED. ………………………………3 分

又 $AC\subset$平面 AEC， 所以平面 $AEC\perp$平面 BED. ………………………………4 分

（2）解法 1：设 $AB=1$，在菱形 $ABCD$ 中，由 $\angle BAD=60^\circ$，可得 $AG=GC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$BG=GD=\dfrac{1}{2}$.

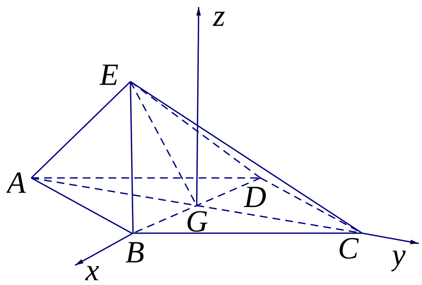
因为 $AE\perp EC$，所以在 Rt△ AEC 中可得 $EG=AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………5 分

由 $BE\perp$平面 $ABCD$，得△ EBG 为直角三角形，

则 $EG^2=BE^2+BG^2$，得 $BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………6 分

过点 G 作直线 $GZ\,//\,BE$，因为 $BE\perp$平面 $ABCD$，所以 $GZ\perp$平面 $ABCD$，又 $AC\perp BD$，

所以建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$.



$G(0,0,0),C\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right),D\left(-\dfrac{1}{2},0,0\right),E\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{GE}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ………………………8 分

设平面 EDC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z),\overrightarrow{DE}=\left(1,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$， ………………………………9 分

取 $x=1,y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},z=-\sqrt{2}$,

所以平面 EDC 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2})$. ………………………………10 分

设直线 EG 与平面 EDC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{GE},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\frac{1}{2}+0-1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{3}+2}}\right|=\left|\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{10}{3}}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 EG 与平面 EDC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………12 分

解法 2：设 $BG=1$，则 $GD=1, AB=2, AG=\sqrt{3}$.

设点 G 到平面 EDC 的距离为 h， EG 与平面 EDC 所成角的大小为 θ.
因为 $AC\perp$ 面 EBD， $EG\subset$ 面 EBD，所以 $AC\perp EG$.
因为 $AE\perp EC$，
所以 $\varDelta AEC$ 为等腰直角三角形. ……………………………………5 分

因为 $AC=2AG=2\sqrt{3}$，所以 $AE=EC=\sqrt{6}$， $EG=AG=\sqrt{3}$.

因为 $AB=BD=2$，所以 $\mathrm{Rt}\varDelta EAB\cong\mathrm{Rt}\varDelta EDB$.

所以 $EA=ED=\sqrt{6}$. ……………………………………6 分

在 ΔEDC 中，$ED=EC=\sqrt{6}, DC=2$，则 $S_{\varDelta EDC}=\sqrt{5}$.……………………………………7 分

在 $\mathrm{Rt}\varDelta EAB$ 中， $BE=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2}=\sqrt{2}$.

$V_{E-GDC}=\dfrac{1}{3}BE\cdot\dfrac{1}{2}S_{\varDelta CBD}=\dfrac{1}{6}\times\sqrt{2}S_{\varDelta ABD}=\dfrac{1}{6}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ……………………………8 分

由 $V_{G-EDC}=\dfrac{1}{3}h\cdot\sqrt{5}=V_{E-GDC}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$， ……………………………………9 分

得 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. ……………………………………10 分

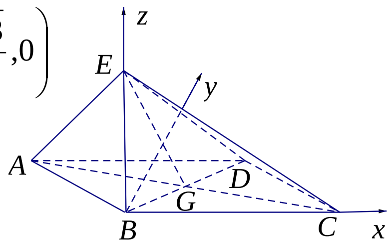
所以 $\sin\theta=\dfrac{h}{EG}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 EG 与平面 EDC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………12 分

解法 3：如图以点 B 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系 $B-xyz$.

不妨设 $AB=2$，

则 $A\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(2,0,0\right),E\left(0,0,\sqrt{2}\right),D\left(1,\sqrt{3},0\right),G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$



所以 $\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{2}\right)$.　　　　…………………………8 分

设平面 EDC 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，　$\overrightarrow{ED}=\left(1,\sqrt{3},-\sqrt{2}\right),\overrightarrow{EC}=\left(2,0,-\sqrt{2}\right)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y-\sqrt{2}z=0\\ 2x-\sqrt{2}z=0\end{cases}$，.　　　　…………………………………9 分

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=1,z=\sqrt{6}$.

所以平面 EDC 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,\sqrt{6}\right)$.　　　　…………………………………10 分

设 EG 与平面 EDC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{EG},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+2}\cdot\sqrt{3+1+6}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 EG 与平面 EDC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.　　　　…………………………………12 分

21.(12 分)

（1）解：因为椭圆 C 的两焦点与短轴的两个端点的连线构成正方形，

所以 $a=\sqrt{2}b$.　　　　…………………………………………………1 分

则椭圆 $C:\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

因为椭圆 C 经过点 $P\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，代入可得 $b^2=1$，…………………………………………2 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.　　　　…………………………………………………3 分

（2）解法 1：若存在点 $E(t,0)$ 满足题设条件，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_1,y_1)$，

当 $MN\perp x$ 时，由椭圆的对称性可知，x 轴上的任意一点(异于点 E,F)到直线 EM,EN 的距离相等.　　　　…………………………………………………4 分

当 MN 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$， ……………………………………………………5 分

根据题意， x 轴平分 $\angle MEN$，则直线 EM,EN 的倾斜角互补. ……………………………6 分

即 $k_{ME}+k_{NE}=0$. ……………………………………………………7 分

则 $\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0$（当 $x_1=t$ 或 $x_2=t$ 时不合题意）， ………………………………8 分

将 $y_1=k(x_1-1)$， $y_2=k(x_2-1)$ 代入上式，得 $\dfrac{k(x_1-1)}{x_1-t}+\dfrac{k(x_2-1)}{x_2-t}=0$，

又 $k\neq 0$，所以 $\dfrac{x_1-1}{x_1-t}+\dfrac{x_2-1}{x_2-t}=0$.

即 $\dfrac{(x_1-1)(x_2-t)}{x_1-t}+\dfrac{(x_2-1)(x_1-t)}{x_2-t}=0$，得 $\dfrac{2x_1x_2-(1+t)(x_1+x_2)+2t}{(x_1-t)(x_2-t)}=0$，

得 $2x_1x_2-(1+t)(x_1+x_2)+2t=0$， ……………………………………………………9 分

将 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$ 代入得 $\dfrac{2t-4}{1+2k^2}=0$， ……………………………10 分

所以 $t=2$. ……………………………………………………11 分

综上，存在定点 $E(2,0)$，使得 x 轴上的任意一点(异于点 E,F)到直线 EM,EN 的距离相等. ……………………………………………………12 分

解法 2：设直线 l 的方程为 $x=my+1$，与椭圆 C 联立得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$.

则 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$， $y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$. ……………………………………………………5 分

根据题意， x 轴平分 $\angle MEN$，则直线 EM,EN 的倾斜角互补. ……………………………6 分

即 $k_{ME}+k_{NE}=0$. ……………………………………………………7 分

则 $\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0$， ……………………………………………………8 分

得 $y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$，即 $y_1(my_2+1-t)+y_2(my_1+1-t)=0$，

得 $2my_1y_2+(1-t)(y_1+y_2)=0$. ……………………………………………9 分

从而 $\dfrac{-2m}{m^2+2}+(1-t)\dfrac{-2m}{m^2+2}=0$，即 $\dfrac{-2m(2-t)}{m^2+2}=0$，……………………………………10 分

所以 $t=2$. ……………………………………………11 分

综上，存在定点 $E(2,0)$，使得 x 轴上的任意一点(异于点 E,F)到直线 EM、EN 的距离相等. ……………………………………………12 分

22.(12 分)

（1）解：若 $a=1$, $f(x)=(x+1)\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-x$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

得 $f'(x)=\ln x-x+\dfrac{1}{x}$. ……………………………………………1 分

设 $g(x)=\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-x^2-1}{x^2}=\dfrac{-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}}{x^2}<0$. …2 分

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(1)=0$， ………………………3 分

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ………………………4 分

综上，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$. ………………………6 分

（2）解法 1：原不等式等价于 $x\ln x-a(x-1)+2x-1>0$,

即 $a<\dfrac{x\ln x+2x-1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立. ………………………………7 分

设 $\varphi(x)=\dfrac{x\ln x+2x-1}{x-1}$，$x>1$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

设 $h(x)=x-\ln x-2$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………8 分

又 $h(3)=3-\ln 3-2=1-\ln 3<0$，$h(4)=4-\ln 4-2=2-2\ln 2>0$，

根据零点存在性定理，可知 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点，

设该零点为 x_0，则 $x_0\in(3,4)$，且 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，即 $x_0-2=\ln x_0$. ………9 分

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $\varphi'(x)<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增；

所以$\varphi(x)_{\min}=\dfrac{x_0\ln x_0+2x_0-1}{x_0-1}=x_0+1$.　　　　……………………………10 分

由题意可知$a<x_0+1$，又$x_0\in(3,4)$，得$4<x_0+1<5$，　……………………………11 分

因为$a\in\mathbf{Z}$,

所以整数a的最大值为4.　　　　　　……………………………………12 分

解法 2：原不等式等价于$x\ln x-a(x-1)+2x-1>0$在$(1,+\infty)$上恒成立.

设$\varphi(x)=x\ln x-a(x-1)+2x-1$，则　$\varphi'(x)=\ln x+3-a$.　　　……………………7 分

（i）当$a\le 3$时，$\varphi'(x)>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，所以$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

故$\varphi(x)>\varphi(1)=1>0$在$(1,+\infty)$上恒成立.　　　……………………………………8 分

（ii）当$a>3$时，令$\varphi'(x)=0$，得$x=\mathrm{e}^{a-3}>1$，

当$x\in(1,\mathrm{e}^{a-3})$时，$\varphi'(x)<0$，故$\varphi(x)$在$(1,\mathrm{e}^{a-3})$上单调递减;

当$x\in(\mathrm{e}^{a-3},+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，故$\varphi(x)$在$(\mathrm{e}^{a-3},+\infty)$上单调递增.

所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi(\mathrm{e}^{a-3})=a-1-\mathrm{e}^{a-3}$.

要使$x\ln x-a(x-1)+2x-1>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，只需$\varphi(x)_{\min}=a-1-\mathrm{e}^{a-3}>0$.…9 分

令$h(x)=x-1-\mathrm{e}^{x-3}$，$x>3$，则$h'(x)=1-\mathrm{e}^{x-3}<0$，所以$h(x)$在$(3,+\infty)$上单调递减.

又$h(4)=3-\mathrm{e}>0$，$h(5)=2-\mathrm{e}^2<0$，

所以$h(x)$在$(3,+\infty)$上存在唯一的零点x_0，且$x_0\in(4,5)$,　……………………………10 分

从而$a-1-\mathrm{e}^{a-3}>0\ (a>3)$的解为$3<a<x_0$.　　……………………………11 分

因为$a\in\mathbf{Z}$,

所以整数a的最大值为4.　　　　　　……………………………………12 分