

数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共4页，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己姓名和考号填写在答题卡上。

2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束，将答题卡交回。

一、选择题（本题共12道小题，其中1至8小题为单项选择题，9至12小题为多项选择题，每小题5分，共60分）

（一）单项选择题（本题共8道小题，每小题只有一个选项正确，每小题5分，共40分）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 0\}$ ，则满足 $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ 的集合 B 的个数是（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2. 在复平面内，已知复数 $z = \frac{1}{1-i}$ ，则其共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ，则 $\cos(-2\alpha) =$ （ ）

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{1}{9}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量，则 “ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ” 是 “ $a \perp b$ ” 的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: x + 2y + 5 = 0$ ，

则双曲线的离心率为（ ）

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6. 设 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则一定能得出 $a \perp b$ 的是 ()

A. $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$

B. $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$

C. $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$

D. $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$

7. 中国古代数学名著《周髀算经》记载的“日月历法”曰:“阴阳之数, 日月之法, 十九岁为一章, 四章为一部, 部七十六岁, 二十部为一遂, 遂千百五十二岁, … 生数皆终, 万物复苏, 天以更元作纪历”. 现有 20 位老人, 他们的年龄 (都为正整数) 之和恰好为一遂, 其中最年长者的年龄大于 90 且不大于 100, 其余 19 人的年龄依次相差一岁, 则这 20 位老人的年龄极差为 ()

A. 28

B. 29

C. 30

D. 32

8. 对于函数 $f(x)$, 若在定义域内存在实数 x_0 , 满足 $f(-x_0) = -f(x_0)$, 称 $f(x)$ 为“局部奇函数”. 若 $f(x) = x^2 - 2m \cdot x + m^2 - 3$ 为定义域 R 上的“局部奇函数”, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{6}]$

B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

C. $[-\sqrt{6}, \sqrt{3}]$

D. $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

(二) 多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 每小题有多个选项正确, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 错选不得分)

9. 已知直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的一条对称轴, 则 ()

A. $f\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ 是奇函数

B. $x = \frac{3\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 的一个零点

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减

D. $y = f(x)$ 与 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

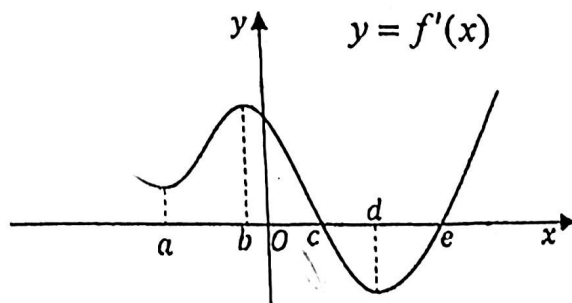
10. 已知函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(a) < f(b) < f(c)$

B. $f(e) < f(d) < f(c)$

C. $x = c$ 时, $f(x)$ 取得最大值

D. $x = d$ 时, $f(x)$ 取得最小值



11. 已知圆 $C: x^2 - 2ax + y^2 + a^2 - 1 = 0$ 与圆 $D: x^2 + y^2 = 4$ 有且仅有两条公共切线, 则实数 a 的取值可以是 ()

A. -3

B. 3

C. 2

D. -2

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n \cdot k^n (n \in \mathbb{N}^*, 0 < k < 1)$, 下列命题正确的有 (

- A. 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列
- B. 当 $k = \frac{4}{5}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 一定有最大项
- C. 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列
- D. 当 $\frac{k}{1-k}$ 为正整数时, 数列 $\{a_n\}$ 必有两项相等的最大项

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 其中 16 题第一个空 2 分, 第二个空 3 分。)

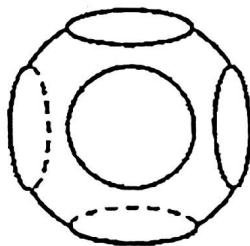
13. $(x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式的常数项是_____。(用数字作答)

14. 若抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点 M 到焦点的距离为 10, 则 M 点到 y 轴的距离是_____。

15. 根据中央关于精准扶贫的要求, 我市农业经济部门随机派遣 4 位专家对 3 个县区进行调研, 每个县区至少派 1 位专家, 则专家派遣的方法的种数为_____。

16. 如图是一个实心工艺品。该工艺品可以看成是一个球体被一个棱长为 8 的正方体的 6 个面所截后剩余的部分 (球心与正方体的中心重合)。若其中一个截面圆的周长为 6π , 则该球的半径为_____;

现给出定义: 球面被平面所截得的一部分叫做球冠。截得的圆叫做球冠的底, 垂直于截面的直径被截得的一段叫做球冠的高。如果球面的半径是 R , 球冠的高是 h , 那么球冠的表面积计算公式是 $S = 2\pi Rh$ 。由此可知, 该实心工艺品的表面积是_____。



三、解答题 (本题共 6 道小题, 共 70 分; 解答要写出证明过程或解题步骤)

17. (本题满分 10 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 现给出两个条件:

① $2\cos C(a\cos C + c\cos A) + b = 0$, ② $3b\cos C + 2c\sin C\sin B = 0$;

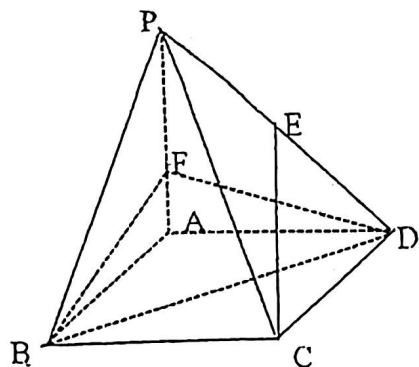
要求你从中选出一个条件 (选出其中一个条件解答, 若两个都选, 则按第一个解答计分), 并以此为依据求解下面问题。

问题: (1) 求角 C ; (2) 若 $c = 2\sqrt{3}$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 求 $a + b$ 的值。

18. (本题满分 12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 若 $a_6 = 11$, 且 a_2, a_3, a_{14} 成等比数列。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

19. (本题满分 12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 3 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$. $PA \perp$ 面 $ABCD$, 且 $PA = 3$. F 在棱 PA 上, 且 $AF = 1$, E 为棱 PD 的中点.



- (1) 求证: $CE \parallel$ 平面 BDF ;
(2) 求二面角 $B-DF-A$ 的余弦值.

20. (本题满分 12 分) 为了遏制新冠肺炎疫情, 科研人员在研究新型冠状病毒某种疫苗的过程中, 要对白鼠进行连续给药后观察是否出现 Z 症状的试验, 该试验的设计为: 对参加试验的每只白鼠每天给药一次, 连续给药四天为一个给药周期, 试验共进行三个周期. 假设每只白鼠给药后当天出现 Z 症状的概率均为 $\frac{1}{3}$, 且每次给药后是否出现 Z 症状与上次给药无关.

- (1) 从试验开始, 若某只白鼠连续出现 2 次 Z 症状即对其终止试验, 求一只白鼠至少能参加一个给药周期的概率;
(2) 若在一个给药周期中某只白鼠至少出现 3 次 Z 症状, 则在这个给药周期后, 对其终止试验, 设一只白鼠参加的给药周期数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

21. (本题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 且椭圆 C 的离心率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

- (2) 若点 M, N 是椭圆 C 上的两个动点, k_1, k_2 分别为直线 OM, ON 的斜率且 $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}$, 求证: $\triangle OMN$ 的面积为定值.

22. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 - ax (a > 0)$

(1) 讨论函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的极值点;

- (2) 若 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是方程 $f(x) - \frac{g(x)}{x^3} + \frac{1}{x} = 0$ 的两个不同的正实根, 证明: $x_1^2 + x_2^2 > 4a$.

潮州市 2020—2021 学年度二模高三级教学质量检测卷

数学参考答案

一、选择题（本题共 12 道小题，1 至 8 小题为单选题，9 至 12 小题为多选题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	C	D	C	B	B	BCD	AB	CD	BCD

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中 16 题第一个空 2 分，第二个空 3 分。）

13. -20 14. 9 15. 36 16. 5; 94 π

1. 【解析】 $\because$ 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x = 0\} = \{0, 2\}$, $\therefore$ 满足 $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ 的集合 B 有：
 $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$, 共 4 个，故选：C.

2. 【解析】复数 $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 共轭复数对应点的坐标 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 在第四象限，故选：D.

3. 【解析】 $\cos(-2\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$, 故选 A.

4. 【解析】 $\because "|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} \cdot \vec{b}|" \therefore$ 平方得 $|\vec{a}|^2 \cdot 9 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 9|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$,

即 $1 \cdot 9 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 1 \cdot 6\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $12\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 即 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

反之也成立，则 $"|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} \cdot \vec{b}|"$ 是 $"\vec{a} \perp \vec{b}"$ 的充要条件，故选：C.

5. 【解析】由题知 $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1 = \frac{1}{4}$, $\therefore e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 故选 D.

6. 【解析】C

7. 【解析】由题意可设年纪最大年龄为 m , 最年纪最小年龄为 n , 则有

$$n + (n+1) + \cdots + (n+18) + m = 1520, \quad m = 1349 - 19n, \quad \therefore 90 < 1349 - 19n \leq 100, \text{ 解之得}$$

$$65\frac{14}{19} < n \leq 66\frac{5}{19}, n \in \mathbb{N}^*, \therefore n = 66, m = 95, \text{ 极差为 } 29, \text{ 故选 B.}$$

8. 【解析】由“局部奇函数”可得：方程 $f(-x) + f(x) = 0$ 有解，即方程
 $f(-x) + f(x) = x^2 + 2mx + m^2 - 3 + x^2 - 2mx + m^2 - 3 = 0$ 有解，整理可得： $m^2 = -x^2 + 3$ 能成立，故 $m^2 \leq 3$,

即 $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$, 答案 B.

9. 【解析】依题意可得， $2 \times \frac{\pi}{8} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$,

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 故 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $f\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$, 所以 $f\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ 是偶函数，故选项 A 错误；

因为 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \pi = 0$ ，故选项 B 正确；

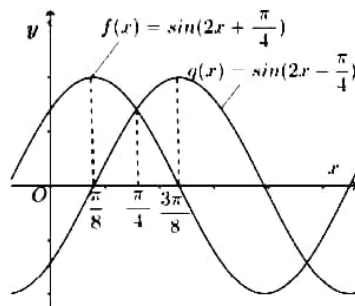
由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，得 $\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ 上单调递减。

因为 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ ，故选项 C 正确；

作出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图象，

由图可知，选项 D 正确。故选：BCD



10. 【解析】由题意可知，函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, c)$ 上单调递增，在 (c, e) 上单调递减，在 $(e, +\infty)$ 上单调递增，故只有 A, B 正确。故选：AB

11. 【解析】圆 C 与圆 D 有且仅有两条公切线得两圆相交， $\therefore 2-1 < |a| < 2+1 \therefore a \in (-3, -1) \cup (1, 3)$ ；故选：CD.

12. 【解析】当 $k = \frac{1}{2}$ 时， $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ ，知 A 错误；当 $k = \frac{4}{5}$ 时， $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{5} \cdot \frac{n+1}{n}$ ，当 $n < 4$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ， $n > 4$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ， $\{a_n\}$

一定有最大项，B 正确；当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时， $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \frac{n+1}{n} < \frac{n+1}{2n} \leq 1$ ，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，C 正确；当 $\frac{k}{1-k}$ 为正

整数时，其值不妨取为 n ，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \frac{n+1}{n} = 1$ ，知数列 $\{a_n\}$ 为常数数列，D 正确；故选：BCD.

13. 【解析】 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (-1)^r x^{6-2r}$ ， $r = 0, 1, \dots, 6$

令 $6 - 2r = 0 \Rightarrow r = 3$ ，所以展开式的常数项为 $C_6^3 \cdot (-1)^3 = -20$ 。

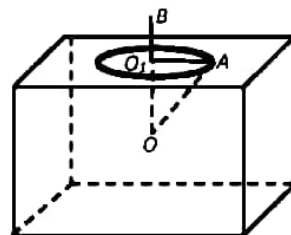
14. 【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$ ，准线为 $x = -1$ ，由 M 到焦点的距离为 10，可知 M 到准线的距离也为 10，故到 M 到的距离是 9。

15. 【解析】先从 4 个专家中选 2 个出来，看成 1 个专家有 $C_4^2 = 6$ 种选法，再将捆绑后的专家分别派到 3 个县区，共有 $A_3^3 = 6$ 种分法，故总共有 $6 \times 6 = 36$ 种派法。

16. 【解析】设截面圆半径为 r ，球的半径为 R ，则球心到某一截面的距离为正方体棱长的一半即此距离为 4，根据截面圆的周长可得 $6\pi = 2\pi r$ ，得 $r = 3$ ，

故 $R^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ，得 $R = 5$ ，所以球的表面积 $S = 100\pi$ 。

如图， $OA = OB = R = 5$ ，且 $OO_1 = 4$ ，则球冠的高 $h = O_1B = OB - OO_1 = 1$ 。



得所截的一个球冠表面积 $S = 2\pi Rh = 2\pi \times 5 \times 1 = 10\pi$ ，且截面圆面积为 9π ，

所以工艺品的表面积 $S' = 4\pi R^2 - 6(S - 9\pi) = 100\pi - 6\pi = 94\pi$ 。

三、解答题 (本题共 6 道小题, 第 17 题 10 分, 第 18~22 题每小题 12 分, 共 70 分)

17. (本小题满分 10 分)

解: 选①, 由 $2\cos C(a\cos C + c\cos A) + b = 0$, 及正弦定理得

$$2\cos C(\sin A\cos C + \sin C\cos A) + \sin B = 0, \therefore 2\cos C\sin(A+C) + \sin B = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because \triangle ABC \text{ 中 } \sin(A+C) = \sin B \neq 0, \therefore 2\cos C + 1 = 0, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because C \in (0, \pi) \therefore C = \frac{2\pi}{3}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

选②由 $3b\cos C + 2c\sin C\sin B = 0$ 及正弦定理

$$\therefore 3\sin B\cos C + 2\sin C\sin C\sin B = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because \sin B \neq 0, \therefore 3\cos C + 2\sin^2 C = 0, 2\cos^2 C - 3\cos C - 2 = 0, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{2} \text{ 即 } \angle C = 120^\circ \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 及 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{3}, \text{ 得 } ab = 4$$

$$\text{由余弦定理得 } (2\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \frac{2\pi}{3} = a^2 + b^2 + ab, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore 12 = (a+b)^2 - ab, \because a, b > 0 \therefore a+b = 4 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (本小题满分 10 分)

解 (1) 法 1: $\because a_6 = 11, \therefore a_1 + 5d = 11, \text{ ①} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\because a_2, a_3, a_4$ 成等比数列, $\therefore (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 13d),$

化简得 $d^2 = 2a_1d, \text{ ②} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又因为 $d \neq 0 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

且由①②可得, $a_1 = 1, d = 2. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$\therefore$ 数列的通项公式是 $a_n = 2n - 1 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

法 2: $\because a_6 = 11, a_2, a_3, a_4$ 成等比数列, $\therefore (a_6 - d)^2 = (a_6 - 4d)(a_6 + 8d), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore (11 - d)^2 = (11 - 4d)(11 + 8d),$ 化简得 $33d^2 = 66d, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又因为 $d \neq 0 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$d = 2 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$\therefore a_n = a_5 + (n - 6)d = 11 + 2(n - 6)$

数列的通项公式是 $a_n = 2n - 1 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本题满分 12 分)

解: (I) 法一: 取 PF 的中点 G , 连接 EG 、 CG , 连接 AC 交 BD 于 O , 连接 FO .

$\because E$ 、 G 分别为 PD 、 PF 的中点

$\therefore EG \parallel FD$, 又 $EG \not\subset$ 面 BDF , $FD \subset$ 面 BDF , $\therefore EG \parallel$ 面 BDF ,3 分

又 $AF=1$, 故 F 为 GA 的中点,

$\therefore FO \parallel GC$, 又 $GC \not\subset$ 面 BDF , $FO \subset$ 面 BDF , $\therefore GC \parallel$ 面 BDF ,4 分

$EG \cap CG = G$, $EG, CG \subset$ 面 CGE ,

$\therefore$ 面 $CGE \parallel$ 面 BDF ,5 分

又 $CE \subset$ 面 CGE , $\therefore CE \parallel$ 面 BDF ,6 分

(II) 法二: 过点 B 作 $BH \perp$ 直线 DA 交 DA 延长线于 H , 过点 H 作 $HI \perp DF$ 交 DF 于 I ,7 分

$\because PA \perp$ 面 $ABCD$, $\therefore$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$,

$\therefore BH \perp$ 面 PAD , $\therefore BH \perp DF$

又 $HI \perp DF$, $\therefore DF \perp$ 面 HIB , $\therefore DF \perp IB$,

$\therefore \angle BIH$ 是二面角 $B-DF-A$ 的平面角.8 分

由题易得 $AH = \frac{3}{2}$, $BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $HD = \frac{9}{2}$, 且 $\frac{HI}{HD} = \frac{AF}{DF} = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$\therefore HI = \frac{9\sqrt{10}}{20}$, 故 $BI = \frac{3\sqrt{390}}{20}$ 10 分

$\therefore \cos \angle BIH = \frac{9\sqrt{10}}{20} \times \frac{20}{3\sqrt{390}} = \frac{\sqrt{39}}{13}$ 11 分

$\therefore$ 二面角 $B-DF-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$12 分

法三: 取 BC 中点 G , 连接 AG , $\because ABCD$ 是 $\angle ABC = 60^\circ$ 的菱形,

$\therefore AG \perp AD$, 又 $PA \perp$ 面 $ABCD$, $\therefore$ 分别以 $\overrightarrow{AG}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AP}$

为 x 、 y 、 z 轴正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 如图所示.7 分

则 $D(0, 3, 0)$, $B(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$, $C(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $F(0, 0, 1)$, $P(0, 0, 3)$,

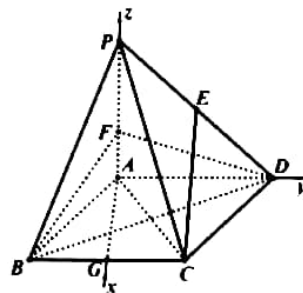
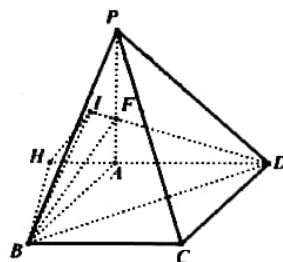
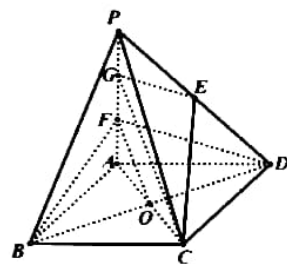
$\therefore \overrightarrow{DF} = (0, -3, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}, 0)$,8 分

设面 BDF 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

则由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} -3y + z = 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{9}{2}y = 0 \end{cases}$, 不妨令 $z = 3$, 则解得 $x = \sqrt{3}$, $y = 1$,

$\therefore \vec{n} = (\sqrt{3}, 1, 3)$10 分

显然面 PAD 的一个法向量 $\vec{m} = (1, 0, 0)$,11 分



$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{39}}{13},$$

$$\therefore \text{二面角 } B-DF-A \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{39}}{13}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设“一只白鼠至少能参加一个给药周期”为事件 M, 则 M 的对立事件为一个给药周期也没有参加完.2 分

设一次给药出现 Z 症状为事件 A, 则一个给药周期也没有参加完的概率为 $P = P(AA) +$

$$P(\bar{A}AA) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{27}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以一只白鼠至少能参加一个给药周期的概率为 } P(M) = 1 - P = 1 - \frac{5}{27} = \frac{22}{27}.$$

.....4 分

(2) 设事件 B 为“在一个给药周期中某只白鼠至少出现 3 次 Z 症状”,

$$\text{则 } P(B) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{9}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

则随机变量 X 的取值为 1, 2, 3.

$$P(X=1) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{9}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(X=2) = [1 - P(B)] \cdot P(B) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{81} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=3) = [1 - P(B)] \cdot [1 - P(B)] = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{64}{81}$

.....10 分

所以随机变量 X 的数学期望为

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{8}{81} + 3 \times \frac{64}{81} = \frac{217}{81}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本题满分 12 分)

解: (1) 由椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 得 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$

由椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, 整理得 $a^2 = 4b^2$ 2 分

由 $\begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $a^2 = 4, b^2 = 1$, 故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(II) ①当直线 MN 的斜率不存在时, $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{2}$, 易得 $\triangle OMN$ 的面积为 1,5 分

②当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y = kx + t$,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + t \end{cases}, \text{ 得 } (1+4k^2)x^2 + 8ktx + 4(t^2-1) = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 x_1, x_2 是方程 $(1+4k^2)x^2 + 8ktx + 4(t^2-1) = 0$ 的两个根,

$$\text{所以 } \Delta = 64k^2t^2 - 16(1+4k^2)(t^2-1) = -16(t^2-4k^2-1),$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{-8kt}{1+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4(t^2-1)}{1+4k^2},$$

$$\text{则 } y_1y_2 = (kx_1+t)(kx_2+t) = k^2x_1x_2 + kt(x_1+x_2) + t^2 = \frac{t^2-4k^2}{1+4k^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以由 } k_1k_2 = \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -\frac{1}{4}, \text{ 可得 } 2t^2 = 4k^2 + 1,$$

$$\text{故 } t^2 \geq \frac{1}{2}, \text{ 此时 } \Delta = -16(t^2-4k^2-1) = 16t^2 > 0. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } |MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2|, \text{ 又点 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle OMN \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot d = \frac{|t|}{2} \cdot |x_1 - x_2| = \frac{|t|}{2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{|t|}{2} \cdot \sqrt{\frac{64k^2t^2}{(1+4k^2)^2}} = \frac{|t|}{2} \cdot \sqrt{\frac{16(2t^2-t^2)}{4t^4}} = 1. \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

综上所述, $\triangle OMN$ 的面积为定值 1.12 分

22. (本题满分 12 分)

解: (1) $h(x) = f(x) + g(x) = \ln x + x^2 - ax$, 函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2x - a = \frac{2x^2 - ax + 1}{x}, \Delta = a^2 - 8 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

①当 $a \in (0, 2\sqrt{2}]$, 即 $\Delta \leq 0$ 时, $h'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增无极值点;2 分

②当 $a \in (2\sqrt{2}, +\infty)$, 即 $\Delta > 0$ 时, 方程 $2x^2 - ax + 1 = 0$ 有两个根 x_1, x_2 , 解得 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{4}$,

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{4} \text{ 且 } 0 < x_1 < x_2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

当 $x \in (0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{4})$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{4}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{4})$ 时, $h'(x) < 0$,

函数 $h(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{4}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增.4 分

此时, 函数 $h(x)$ 的极大值点为 $\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{4}$, 极小值点为 $\frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{4}$ 5 分

(2) 方程 $f(x) - \frac{g(x)}{x^3} + \frac{1}{x} = 0$ 即方程 $\ln x + \frac{a}{x^2} = 0$, 设 $k(x) = \ln x + \frac{a}{x^2}, (x > 0, a > 0)$

$$k'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2a}{x^3} = \frac{x^2 - 2a}{x^3}, (a > 0)$$

$\therefore k(x)$ 在 $(0, \sqrt{2a})$ 上递减, 在 $(\sqrt{2a}, +\infty)$ 上递增, 又 $\because k(x)$ 有两零点

$$\therefore k(\sqrt{2a}) < 0, \text{ 即 } \ln \sqrt{2a} + \frac{a}{2a} < 0, \text{ 解得 } 0 < a < \frac{1}{2e}, \text{ 且 } \begin{cases} \ln x_1 + \frac{a}{x_1^2} = 0 \\ \ln x_2 + \frac{a}{x_2^2} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

两式相减得 $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{a}{x_1^2} - \frac{a}{x_2^2}$, 设 $t = \frac{x_2}{x_1} (t > 1)$

$$\therefore \ln t = \frac{a}{x_1^2} - \frac{a}{t^2 x_1^2}, \therefore x_1^2 = \frac{a}{\ln t} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)$$

要证明 $x_1^2 + x_2^2 > 4a$, 只需证 $(1+t^2)x_1^2 > 4a$, 只需证 $(1+t^2) \frac{a}{\ln t} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) > 4a$

只需证 $(1+t^2) \frac{1}{\ln t^2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) > 2$, 只需证 $2 \ln t^2 - t^2 + \frac{1}{t^2} < 0 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

记 $q(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x} (x > 1), q'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0 (x > 1)$

$\therefore q(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减, $\therefore q(x) < q(1) = 0$

$\therefore 2 \ln x - x + \frac{1}{x} < 0$, 即 $x_1^2 + x_2^2 > 4a \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$