惠州市 2022 届高三第一次调研考试

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题满分 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	C	B	C	A	D

1. 【解析】由 $A\bigcup B=R$，结合数轴可得 $a>2$；

2. 【解析】$\because \frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i-1$，$\therefore$复数 z 对应复平面上的点为$(-1,1)$，在第二象限；

3. 【解析】由 $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow m=3$或$m=-2$，因此“$m=-2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分不必要条件；

4. 【解析】由$\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，得$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\therefore\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$.

5. 【解析】因为$f(x)=\frac{2x}{2^x+2^{-x}}$，所以$f(-x)=\frac{-2x}{2^{-x}+2^x}=-f(x)$，函数$f(x)=\frac{2x}{2^x+2^{-x}}$为奇函数，排除A；

   $x>0$时，$f(x)=\frac{2x}{2^x+2^{-x}}>0$恒成立，排除$D$;因为$f(1)=\frac{2}{2^1+2^{-1}}=\frac{4}{5}$，$f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{3}<f(1)$，排除 C.

   【另解】当 $x\to+\infty$ 时，根据一次函数与指数函数的增长速度，可知 $y\to 0$，再结合奇偶性可选 B.

6. 【解析】依据题意可知$\mu=100,\sigma=10$，由于$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，

   所以$P(80<X\le 120)\approx 0.9545$．因此本次考试 120 分以上的学生约有$20000\times\frac{1-0.9545}{2}=455$人.

7. 【解析】依题意数列第 1、2 项为奇数，第 3 项为偶数，第 4、5 项为奇数，第 6 项又为偶数，依次循环，因此共有偶数$\frac{300}{3}=100$，因此 $P=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$；

8. 【解析】$\because a_n>0,\therefore q>0$, 由 $a_6+a_7>a_6a_7+1$，$\therefore a_6a_7-a_6-a_7+1=(a_6-1)(a_7-1)<0$，

   又$\because a_1>1$，$\therefore$等比数列$\{a_n\}$是递减数列，且 $a_6>1$，$a_7<1$，$\therefore$选项 A、B 正确；又

   $T_{12}=a_1a_2\cdots a_{12}=(a_6a_7)^6>1$，$T_{13}=a_1a_2\cdots a_{13}=a_7^{13}<1$，$\therefore$选项 C 正确，选项 D 错误；

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题满分 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11	12
全部正确选项	AD	ABD	CD	BCD

9. 【解析】 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore T=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，$A$ 正确；，将 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的

图象右移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得函数 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，不满足 $g(-x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 不是奇函数，B 错误；因为 $2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $x=\frac{5\pi}{6}$ 不是函数 $y=f(x)$ 的对称轴，而是函数 $y=f(x)$ 对称中心的横坐标，C 错误，D 正确.

10. 【解析】由 $m\perp\alpha$，$m//n$，得 $n\perp\alpha$，又由 $n\subset\beta$，得 $\alpha\perp\beta$，A 正确；由 $\alpha//\beta$，$m\perp\alpha$，得 $m\perp\beta$，又由 $n\perp\beta$，得 $m//n$，B 正确；若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，m，n 可能平行也可能是异面直线，C 错误；由面面垂直的性质定理知 D 正确.

11. 【解析】：对于 A：若 $a<b$，$c=0$，则有 $ac^2=bc^2$，不正确；对于 B：若 $a<0<b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，不正确；对于 C：因为 $\log_{0.2}3<\log_{0.2}1=0$，$1=\log_3 3<\log_3 4<\log_3 9=2$，$\log_4 18>\log_4 16=2$，所以 $\log_{0.2}3<\log_3 4<\log_4 18$，正确；对于 D：$0.3^{0.3}<0.3^0=1$，$1=3^0<3^{0.2}<3^{0.3}<5^{0.3}$，所以 $0.3^{0.3}<3^{0.2}<5^{0.3}$，正确.

【另解】当判断出 A、B 选项不正确后，根据多选题的规则可选 CD.

12. 【解析】由题意知 C 的渐近线方程为 $x\pm ay=0$，所以 $\frac{|2|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，解得：$a=\sqrt{3}$，所以半焦距 $c=2$，所以 $e=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 A 错误，B 正确；设 $P(x_0,y_0)$，由 $a=\sqrt{3}$ 知：$\frac{{x_0}^2}{3}-{y_0}^2=1$，所以 $d_1=\frac{|x_0-\sqrt{3}y_0|}{2}$，$d_2=\frac{|x_0+\sqrt{3}y_0|}{2}$，所以 $d_1\cdot d_2=\frac{|x_0-\sqrt{3}y_0|}{2}\cdot\frac{|x_0+\sqrt{3}y_0|}{2}=\frac{|{x_0}^2-3{y_0}^2|}{4}=\frac{3}{4}$.故 C 正确；

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),D(x_3,y_3)$，则 $\begin{cases}\frac{{x_1}^2}{3}-{y_1}^2=1\\ \frac{{x_2}^2}{3}-{y_2}^2=1\end{cases}$，相减得：$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{3}-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，则 $\frac{1}{3}-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=0$，则 $\frac{1}{3}-k_1k_2=0$，则 $k_1k_2=\frac{1}{3}$，故 D 正确. 故选 BCD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $ex-y=0$；（或“$y=ex$”）

14. 利润最小值为 10 万元**【也可以是：**利润最大值为 30 万元，全年总利润为 250 万元，月平均利润为 20.8 万元，利润众数为 20 万元，**等……】**；

15. 13；　　16. $\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\pi$ **【结果可以写成** $\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}{4}\pi$ **】**；

13. 【解析】$f(1)=e$，$f'(x)=e^x$，则 $f'(1)=e$，

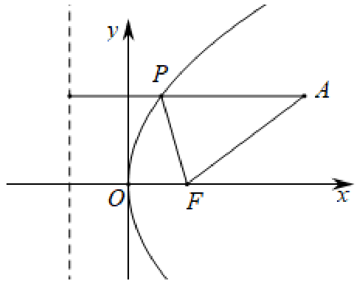
故所求切线方程为 $y-e=e(x-1)$，整理得 $ex-y=0$；

14. 【解析】本题为开放题，由图可得，1 月到 12 月的利润分别为 20，20，30，20，20，20，20，10，20，30，20，20，故 8 月份利润低为 10 万元，3 月和 1 月利润最高，为 30 万元，全年总利润为 250

万元，月平均利润为 20.8 万元，利润众数为 20 万元，利润方差约为 24.3……等正确结论都可以.

15. 【解析】因为 A 在抛物线内部，抛物线的焦点$F(2,0)$，抛物线的准线方程为$x=-2$，$\triangle PAF$的周长为$|PA|+|PF|+|AF|$，$|AF|=5$，

∴当过 A 作准线的垂线交抛物线于点 P 时，$|PA|+|PF|$最小，此时$|PA|+|PF|=6+2=8$，$\triangle PAF$周长的最小值为$8+5=13$.



16.【解析】球的体积要达到最大，则需要球与正四棱锥五个面都相切，

正四棱锥的高为$h=\sqrt{8^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=4\sqrt{2}cm$，设球的半径为 r，

所以四棱锥的体积$V=\frac{1}{3}\times(8\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times4+64)r=\frac{1}{3}\times(64\sqrt{3}+64)r=(\frac{1}{3}\times64\times4\sqrt{2})cm^3$，

故解得$r=2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)cm$， 则 $\frac{V_{蛋黄}}{V_{粽子}}=\frac{\frac{4\pi}{3}r^3}{\frac{1}{3}\left(64\sqrt{3}+64\right)r}=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\pi$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

【解析 1】选择条件①$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$：

【解法 1】根据三角形面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$， ………………1 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\cdot BC\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$， ………………………………………2 分

由选择条件得$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$，$\therefore BC=2$， ………………………………………4 分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$…………5 分

$\therefore AC^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}$ ……………………………………………6 分

$=4+4+4=12$， ……………………………………………………………8 分

$\therefore AC=2\sqrt{3}$. …………………………………………………………………10 分

【注】1、若解答过程无定义a,b,c而使用此三个符号，需扣 1 分。

2、能正确写出对解题有用的三角形面积计算公式和余弦定理表达式（非文字），可各给 1 分。

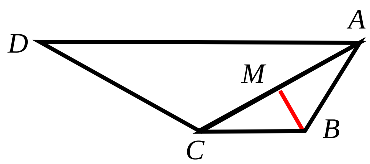
【解法 2】根据三角形面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$，……1 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\cdot BC\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$， ………………2 分

$\therefore BC=2$， ……………………………………………4 分

所以$\triangle ABC$为等腰三角形，…………………………5 分

过 B 作 $BM\perp AC$……………………………………6 分



则 $\angle ABM=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………………………7 分

由勾股定理 $AB^2=AM^2+BM^2$ 得 $AM=\sqrt{3}$ ……………8 分

所以 $AC=2\sqrt{3}$． ……………………………………………10 分

【解析 2】选择条件② $\angle ADC=\dfrac{\pi}{6}$：

设 $\angle BAC$=$\angle CAD$=θ，则 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，$\angle BCA=\dfrac{\pi}{3}-\theta$， ……………………1 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle BCA}$， ……………………………2 分

即 $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$，$\therefore AC=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$ ……………………………4 分

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即 $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}$，$\therefore AC=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$ ………………………………………6 分

$\therefore\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$，$\therefore\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$， ……………………………7 分

又 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}$， ……………………………………………………8 分

则 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$， ……………………………………………………………9 分

所以 $AC=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}=2\sqrt{3}$． ……………………………………………10 分

【注】1、若解答过程无写出 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，需扣 1 分。

2、能正确写出对解题有用的正弦定理表达式（非文字），可给 1 分，但不重复给分。

3、无过程直接得出 $\angle CAB=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，最多可得 4 分（公式 1 分及 8-10 分点）。

18．（本小题满分 12 分）

【解析】

（1）**【解法 1】**由已知得 $a_n-a_{n-1}=n$，

$\therefore(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots\cdots+(a_2-a_1)=n+(n-1)+\cdots\cdots+2$， …………2 分

即 $a_n - a_1 = 2+3+\cdots\cdots+n$，…………3 分

又 $a_1 = 1$，$\therefore a_n = 1+2+3+\cdots\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$……5 分

所以 $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

【注】1、过程有体现累加的思想，可得 1 分。

2、若等差数列求和出现项数或首项错误，但能写出等差数列求和公式表达式，可得 1 分。

【解法 2】（数学归纳法）

由 a_1=1得 $a_2 = a_1 + 2 = 3$ …………………………1 分

$a_3 = a_2 + 3 = 6$，$a_4 = a_3 + 4 = 10$

猜测 $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. …………………………2 分

下面用数学归纳法加以证明：

①当 $n=1$ 时，$a_1 = 1 = \dfrac{1\times(1+1)}{2}$，显然成立.

②假设当 $n = k\ (k \ge 1, k \in Z)$ 时成立，即 $a_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. …………………………3 分

则当 $n = k+1$ 时，$a_{k+1} = a_k + (k+1)$ …………………………4 分

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$= \dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ 成立. …………………………5 分

所以 $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

【注】1、只有猜测结果且正确，没有证明过程，只可得 2 分。

2、根据满分卷无瑕疵原则，证明可给满分的情况下，没有写出递推奠基或未指出 k 的范围（即 $k \ge 1$，$k \in Z$）需扣 1 分。

3、证明过程化简未正确写出 $\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ 的形式，5 分点不得分。

（2）$\because a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$\therefore b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)2^{n-1}}=\dfrac{n}{2^n}$ ……………………………6 分

记 $T_n=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}$ ①，……………………………………………7 分

$\therefore \dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}$ ②，………………………………8 分

①-②，得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$，…………………………9 分

$=1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$

$\therefore T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$ ……………………………………………………………………10 分

又 $\dfrac{n+2}{2^n}>0$，…………………………………11 分**【无此步骤，该得分点不得分】**

$\therefore 2-\dfrac{n+2}{2^n}<2$，

即 $b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n<2$ ……………………………………………………………12 分

【注】1、解答过程有错位相减法的思想，可得 1 分。

2、其它类似解法可按本过程得分点对应给分即可。

19. （本小题满分 12 分）

【解析】（1）**【解法 1】**在直角梯形 $ABCD$ 中，因为 $AD=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2}$，$CD=2$，

所以 $AB=\sqrt{(AD-BC)^2+CD^2}=\sqrt{6}$；………………………………………………………1 分

因为平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$ 且 $BC\perp CD$，

所以 $BC\perp$ 平面 PDC，……………………………………………………………………2 分

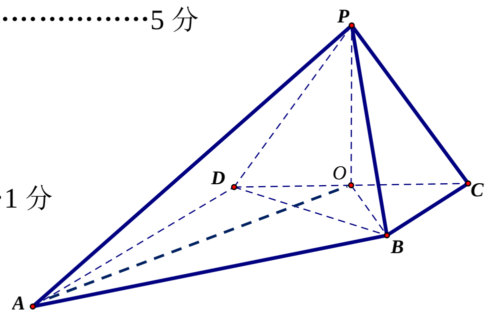
因此在 $\mathrm{Rt}\Delta BCP$ 中，$PB=\sqrt{BC^2+PC^2}=\sqrt{6}$．…………………………………………3 分

因为 $BC//AD$ 所以 $AD\perp$ 平面 PDC，

所以在 $\mathrm{Rt}\Delta PAD$ 中，$PA=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{12}$．…………………4 分

所以在 ΔPAB 中，$PA^2=AB^2+PB^2$，

所以 $AB\perp PB$．……………………………………………………………………………5 分



【解法 2】如图，取 CD 中点 O，连结 PO,OA,OB，则 $PO\perp CD$

在直角梯形 $ABCD$ 中，因为 $AD=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2}$，$CD=2$，

所以 $AB=\sqrt{(AD-BC)^2+CD^2}=\sqrt{6}$；…………………………………1 分

在 $\mathrm{Rt}\Delta OAD$ 中，$AO=\sqrt{AD^2+DO^2}=3$．

在 $\mathrm{Rt}\Delta OCB$ 中，$BO=\sqrt{BC^2+CO^2}=\sqrt{3}$．

所以在 ΔOAB 中，$OA^2 = AB^2 + OB^2$，即 $AB \perp OB$． ……………………2 分

因为平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDC \cap$ 平面 $ABCD = CD$，$PO \subset$ 平面 PDC 且 $PO \perp CD$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，…………………………………………………………3 分

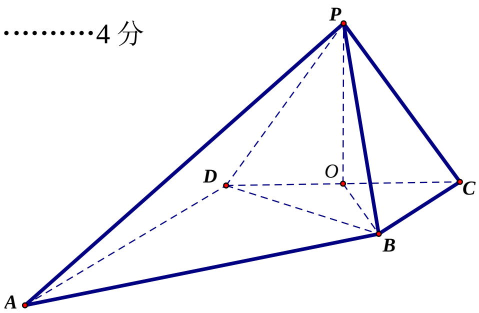
又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，$AB \perp PO$

又 $PO \subset$ 平面 PBO，$BO \subset$ 平面 PBO，$PO \cap BO = O$

所以 $AB \perp$ 平面 PBO，…………………………………………………………4 分

又 $PB \subset$ 平面 PBO，

所以 $AB \perp PB$……………………………………………………5 分



（2）**【解法 1】**设线段 DC 的中点为 O，连接 PO，OB

因为 ΔPCD 是等边三角形，所以 $PO \perp CD$，

因为平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDC \cap$ 平面 $ABCD = CD$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，$AB \perp PO$，

由（1）知 $AB \perp PB$，…………………………………………………………6 分

所以 $AB \perp$ 平面 POB，所以 $AB \perp BO$，…………………………………………7 分

因此 $\angle PBO$ 是二面角 $P-AB-D$ 的平面角，…………………………………8 分

在 $\mathrm{Rt}\Delta PBO$ 中，$\sin\angle PBO = \dfrac{PO}{PB} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，……………………………………9 分

因为 $0 < \angle PBO < \dfrac{\pi}{2}$，………………………………10 分**【无此步骤，该得分点不得分】**

所以 $\angle PBO = \dfrac{\pi}{4}$，…………………………………………………………………11 分

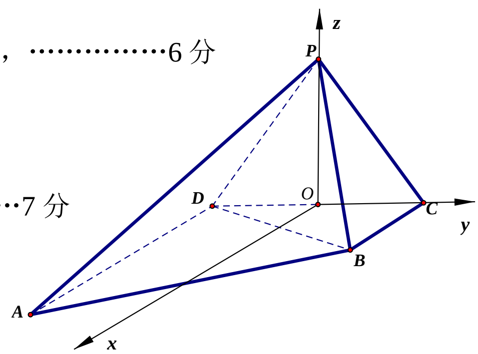
即二面角 $P-AB-D$ 为 $\dfrac{\pi}{4}$ ……………………………12 分**【无此步骤，该得分点不得分】**

【注】1、能正确指出二面角的平面角，可得 1 分。

2、二面角的平面角证明过程得 2 分，注意可能在第（1）小问证明中已经有这个过程。

【解法 2】如图，以 O 为 $(0,0)$ 点，过 O 作平行于 AD 的直线为 x 轴，

以 OC 方向直线为 y 轴，以 OP 方向直线为 z 轴建立空间直角坐标系，……………6 分



$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(2\sqrt{2},-1,0)$，$\therefore \overrightarrow{PA} = (2\sqrt{2},-1,-\sqrt{3})$

$B(\sqrt{2},1,0)$，$\therefore \overrightarrow{PB} = (\sqrt{2},1,-\sqrt{3})$，……………………………………7 分

设面 PAB 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，由 $\vec{n} \perp$ 面 PAB 得：

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2\sqrt{2}x - y - \sqrt{3}c = 0 \\ \sqrt{2}x + y - \sqrt{3}c = 0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = 0 \\ 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}c = 0 \end{cases}$，……………………8 分

令 $x = \sqrt{2}$，$\therefore y = 1, c = \sqrt{3}$，$\therefore \vec{n} = (\sqrt{2},1,\sqrt{3})$ ……………………………………9 分

又 $OP\perp$ 面 $ABCD$，$\therefore$ 面 $ABCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{OP}=\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，…………………10 分

$\therefore\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OP}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，…………………………………11 分

因为 $0<\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OP}\right\rangle<\pi$ $\therefore\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OP}\right\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，

由图可得二面角 $P-AB-D$ 为锐角，$\therefore$ 二面角 $P-AB-D$ 为 $\dfrac{\pi}{4}$…………………12 分

【注】1、本过程 7 分可分解为：建系 1 分，向量 1 分，法向量方程组 1 分，法向量各 1 分，余弦值 1 分，结论 1 分。

2、空间点的坐标没有得分点。

20．（本小题满分 12 分）

【解析】（1）记 A_1 表示事件“第 2 局结果为甲胜”，

A_2 表示事件“第 3 局甲参加比赛时，结果为甲负”，

A 表示事件“第 4 局甲当裁判”. ……………………………………………1 分

则 $A=A_1\cap A_2$ ………………………………………………………2 分

$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)P(A_2)$ ………………………………………3 分

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{4}$ ………………………………………………………………4 分

所以第 4 局甲当裁判的概率为 $\dfrac{1}{4}$.

（2）X 的所有可能取值为 0、1、2， ……………………5 分**【无此步骤，该得分点不得分】**

记 A_3 表示事件“第 3 局乙和丙比赛时，结果为乙胜丙”，

B_1 表示事件“第 1 局结果为乙胜丙”，

B_2 表示事件“第 2 局乙和甲比赛时，结果为乙胜甲”，

B_3 表示事件“第 3 局乙参加比赛时，结果为乙负”.

则 $P(X=0)=P(B_1\cap B_2\cap A_3)=P(B_1)P(B_2)P(A_3)=\dfrac{1}{8}$ ……………………………6 分

$P(X=2)=P(\overline{B_1}\cap B_3)=P(\overline{B_1})P(B_3)=\dfrac{1}{4}$， ………………………………………7 分

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$， ……………………………8 分

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

……………10 分

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{5}{8}$……………………………………………………………11 分

$=\frac{9}{8}$………………………………………………………………………………12 分

【注】1、分布列无列表，则不给列表的 1 分。

2、计算结果出错，则期望值公式给 1 分。注意期望值公式必须包含$0\times\frac{1}{8}$，即期望值公式写成 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{5}{8}$ 则公式分为 0 分。

21．（本小题满分 12 分）

【解析】（1）设椭圆的焦距为$2c$，则$c=1$…………………………………………………1 分

$\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，……………………………………………………………2 分

解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$（或写成$\begin{cases}a^2=2\\ b^2=1\end{cases}$），……………………………………3 分

$\therefore$椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；……………………………………………4 分

（2）证明：设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx+t\end{cases}$

消去y得：$(2k^2+1)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，……………………………………5 分

由韦达定理得$x_1+x_2=-\frac{4kt}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-2}{2k^2+1}$……①　………………………6 分

由$A(0,1)$与$P(x_1,y_1)$可得直线AP的方程为：$y=\frac{y_1-1}{x_1}\cdot x+1$，………………7 分

$\therefore M(-\frac{x_1}{y_1-1}$，$0)$，…………………………………………………………………8 分

同理：$N(-\frac{x_2}{y_2-1}$，$0)$，

又$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1$，$\therefore\frac{x_1x_2}{(y_1-1)(y_2-1)}=1$，…………………………………………9 分

化简得$x_1x_2-y_1y_2+(y_1+y_2)-1=0$，

$\therefore(1-k^2)x_1x_2+(k-kt)(x_1+x_2)-t^2+2t-1=0$，……10 分**【无此步骤，该得分点不得分】**

将①代入上式得 $(1-k^2)\dfrac{2t^2-2}{2k^2+1}+(k-kt)\dfrac{-4kt}{2k^2+1}-t^2+2t-1=0$

化简得：$\dfrac{(t+3)(t-1)}{2k^2+1}=0$， …………………………11 分**【无此步骤，该得分点不得分】**

因为 $t\neq\pm1$，$\therefore t=-3$

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y=kx-3$，经过定点 $(0,-3)$． ………………………………12 分

【注】1、10 分点-11 分点的每一步都不能省略。

22．（本小题满分 12 分）

【解析】（1）$\because \ln x-ax\leqslant 0$，$x>0$，$\therefore a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$， ……………………………………………1 分

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$， ……………………………………………2 分

令 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，则 $x=e$，且函数 $y=1-\ln x$ 单调递减，…………3 分

$\therefore h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，$(e,+\infty)$ 上单调递减， ……………………4 分

$\therefore h(x)_{max}=h(e)=\dfrac{1}{e}$，

$\therefore a\in\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$． ……………………………………………………5 分

（2）**【解法 1 参变分离】**

由 $g(x)=\dfrac{e^2}{2}$，得 $x\ln x-ax^2=\dfrac{e^2}{2}$，得 $a=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{e^2}{2x^2}$， ……………………………6 分

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{e^2}{2x^2}$，其中 $x>0$， …………………………………………………7 分

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{e^2}{x^3}=\dfrac{x-x\ln x+e^2}{x^3}$，

令 $s(x)=x-x\ln x+e^2$，$s'(x)=-\ln x$，

当 $0<x<1$ 时，$s'(x)>0$，此时函数 $y=s(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$s'(x)<0$，此时函数 $y=s(x)$ 单调递减．………………………………8 分

$\because s(1)=1+e^2$，$s(e^2)=0$，

当 $x<1$，$x-x\ln x+e^2=x(1-\ln x)+e^2>0$，

当 $1<x<e^2$ 时，$s(x)>s(e^2)=0$，则 $\varphi'(x)>0$；

当 $x>e^2$ 时，$s(x)<s(e^2)=0$，则 $\varphi'(x)<0$．

$\therefore$ 函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $(0,e^2)$ 上单调递增，在区间 $(e^2,+\infty)$ 单调递减， ……………9 分

则 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e^2)=\dfrac{3}{2e^2}$， ……………………………………………………10 分

且当 $x>e^2$ 时，$\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{e^2}{2x^2}>0$， ………………………………………………11 分

当 $x\to0$ 时，$\varphi(x)\to-\infty$，

则 $0<a<\dfrac{3}{2e^2}$，

即 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{3}{2e^2}\right)$． ……………………………………………………………12 分

【解法 2 带参讨论】

$g(x)=\dfrac{e^2}{2}$ 有两个不同的实根，即 $\ln x-ax-\dfrac{e^2}{2x}=0$ 有两个不同的正根，……………………6 分

令 $h(x)=\ln x-ax-\dfrac{e^2}{2x},(x>0)$，

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a+\dfrac{e^2}{2x^2}=\dfrac{-2ax^2+2x+e^2}{2x^2}$

当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不满足题设；………7 分

当 $a>0$ 时，令 $\mu(x)=-2ax^2+2x+e^2$，由 $4+8ae^2>0$ 可知

存在 x_1,x_2，使 $\mu(x_1)=\mu(x_2)=0$ 且 $x_1<0<x_2$，

则由 $-2ax_2{}^2+2x_2+e^2=0$ 得 $2ax_2{}^2=2x_2+e^2$ （*） ……………………………………………8 分

因为 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{max}=h(x_2)=\ln x_2-ax_2-\dfrac{e^2}{2x_2}=\ln x_2-\dfrac{2ax_2{}^2+e^2}{2x_2}$，

将（*）式代入上式，得 $h(x)_{max}=h(x_2)=\ln x_2-1-\dfrac{e^2}{x_2}$ ………………………………………9 分

令 $\varphi(x)=\ln x-1-\dfrac{e^2}{x}$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且 $\varphi(e^2)=0$，

欲使 $y=h(x)$ 有两个零点，则需 $\varphi(x)_{max}=\varphi(x_2)=\ln x_2-1-\dfrac{e^2}{x_2}>0=\varphi(e^2)$，

则 $x_2>e^2$，……………………………………………………………………………………10 分

$\therefore \dfrac{1+\sqrt{1+2ae^2}}{2a}>e^2$，即 $1+\sqrt{1+2ae^2}>2ae^2$，………………………………………11 分

化解得 $2ae^2<3$，即 $a<\dfrac{3}{2e^2}$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,\dfrac{3}{2e^2})$． ………………………………………………………12 分