

惠州市 2022 届高三第一次调研考试试题

数 学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

注意事项:

- 1、答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号、座位号、学校、班级等考生信息填写在答题卡上.
- 2、作答单项及多项选择题时，选出每个小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息点涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，写在本试卷上无效.
- 3、非选择题必须用黑色字迹签字笔作答，作图题可先用铅笔作答，答案必须写在答题卡各题指定的位置上，写在本试卷上无效.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题满分 5 分，共 40 分.

在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，选对得 5 分，选错得 0 分.

1. 已知集合 $A = \{x | x > 2\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为().

A. $(-\infty, 2]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(2, +\infty)$

2. 已知 i 是虚数单位，复数 $\frac{2i}{1-i}$ 在复平面内所对应的点位于().

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

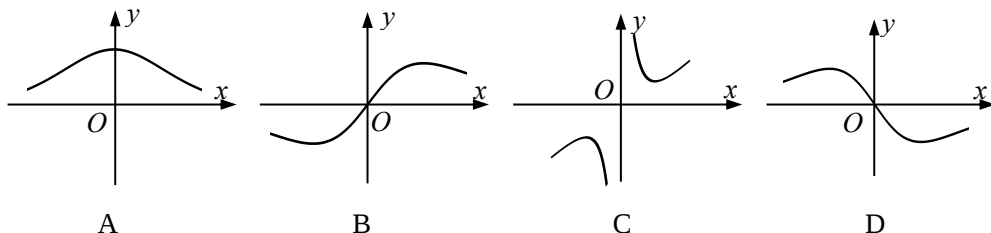
3. 已知向量 $\vec{a} = (m-1, -3)$, $\vec{b} = (2, -m)$, 则“ $m=3$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的()条件.

A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

4. 若 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(2\alpha) = ()$.

A. $\frac{16}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{24}{25}$

5. 函数 $f(x) = \frac{2x}{2^x + 2^{-x}}$ 的大致图象是().



6. 若随机变量 X 满足正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则有 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$. 现有 20000 人参加数学测试, 成绩大致服从正态分布 $N(100, 10^2)$, 则可估计本次测试数学成绩 120 分以上的学生人数约为 ().

- A. 1587 B. 228 C. 455 D. 3174

7. 意大利数学家斐波那契的《算经》中记载了一个有趣的问题: 已知一对兔子每个月可以生一对兔子, 而一对兔子出生后在第二个月就开始生小兔子. 假如没有发生死亡现象, 那么兔子对数依次为: 1、1、2、3、5、8、13、21、……, 这就是著名的斐波那契数列, 它的递推公式是 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$, 其中 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. 若从该数列的前 300 项中随机地抽取一个数, 则这个数是偶数的概率为 ().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{33}{100}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{67}{100}$

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 公比为 q , 且 $a_1 > 1$, $a_6 + a_7 > a_6 a_7 + 1 > 2$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则下列选项错误的是 ().

- A. $0 < q < 1$ B. $a_6 > 1$ C. $T_{12} > 1$ D. $T_{13} > 1$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题满分 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论正确的有 ()

- A. 函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 π .
- B. 将函数 $y = f(x)$ 的图象右移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, 得到一个奇函数.
- C. $x = \frac{5\pi}{6}$ 是函数 $y = f(x)$ 的一条对称轴.
- D. $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 是函数 $y = f(x)$ 的一个对称中心.

10. 在空间中, α 、 β 是两个不同的平面, m 、 n 是两条不同的直线, 下列说法正确的有 ()

- A. 若 $m \perp \alpha$, $m // n$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
- B. 若 $\alpha // \beta$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $m // n$
- C. 若 $\alpha // \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m // n$
- D. 若 $\alpha \perp \beta$, $m \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = n$, $m \perp n$, 则 $m \perp \beta$

11. 下列不等关系中, 正确的有 ()

- A. 若 $a < b$, 则 $a \cdot c^2 < b \cdot c^2$
- B. 若 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- C. $\log_{0.2} 3 < \log_3 4 < \log_4 18$
- D. $0.3^{0.3} < 3^{0.2} < 5^{0.3}$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$, 若圆

$(x-2)^2 + y^2 = 1$ 与双曲线 C 的渐近线相切, 则下列选项中, 正确的有 ()

A. 双曲线 C 的实轴长为 6

B. 双曲线 C 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. 点 P 为双曲线 C 上任意一点, 若点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 ,

$$\text{则 } d_1 \cdot d_2 = \frac{3}{4}$$

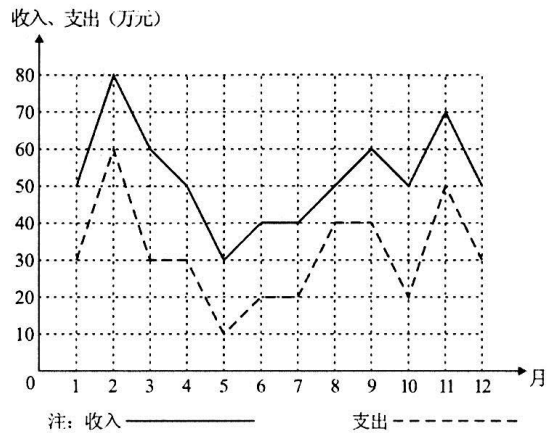
D. 直线 $y = k_1 x + m$ 与 C 交于 A, B 两点, 点 D 为弦 AB 的中点, 若 OD (其中 O 为坐

标原点) 的斜率为 k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{3}$

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 已知函数 $f(x) = e^x$, 则曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

14. 某市场去年各月份的收入、支出的统计数据如右图所示，已知利润 $P = \text{收入} - \text{支出}$ ，请根据此统计图写出一个关于利润 P 的正确统计结论：_____.



15. 已知点 P 在抛物线 $y^2 = 8x$ 上，点 F 为该抛物线的焦点，又已知点 A 的坐标为 $(6, 3)$ ，则 $\triangle PAF$ 周长的最小值为_____.

16. 粽子古称“角黍”，是中国传统的节庆食品之一，由粽叶包裹糯米等食材蒸制而成。因各地风俗不同，粽子的形状和味道也不同。南粤流行的“五角粽子”（又称“塔粽”），其形状可以看成所有棱长均相等的正四棱锥。现制作一个棱长均为 8cm 的五角粽子，需要在该粽子内部放入一颗咸蛋黄，蛋黄的形状近似地看成球，则当这个蛋黄的体积最大时，蛋黄的体积与粽子体积的比值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

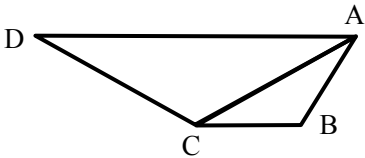
17. （本小题满分 10 分）

已知条件① $\triangle ABC$ 面积 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ ，条件② $\angle ADC = \frac{\pi}{6}$ ；

请从上述两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答。

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ， $\angle BAC = \angle DAC$ ，_____，

$CD = 2\sqrt{3}$ ， $AB = 2$ ，求 AC 。



【注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。】

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 且 $a_n=a_{n-1}+n$ ($n \geq 2$ 且 $n \in N^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

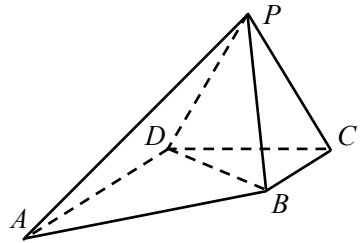
(2) 若 $b_n = \frac{a_n}{(n+1) \cdot 2^{n-1}}$, 求证: $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 2$.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $BC = \sqrt{2}$, $BC = \frac{1}{2}AD$, $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, 且平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PCD$ 是边长为 2 的等边三角形.

(1) 证明: $AB \perp PB$;

(2) 求二面角 $P-AB-D$ 的大小.



20. (本小题满分 12 分)

甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 各局比赛的结果相互独立, 第 1 局甲当裁判.

(1) 求第 4 局甲当裁判的概率;

(2) 用随机变量 X 表示前 4 局中乙当裁判的次数, 求 X 的分布列及数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$, 且经过点 $A(0, 1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 $l: y = k \cdot x + t$ ($t \neq \pm 1$) 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q , 直线 AP 与 x 轴交

于点 M , 直线 AQ 与 x 轴交于点 N , 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 1$, 求证: 直线 l 经过定点.

22. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \ln x - a \cdot x$ ($a \in \mathbb{R}$), $g(x) = x \cdot f(x)$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $g(x) = \frac{e^2}{2}$ 有两个不同的实数根, 求 a 的取值范围.