# 2021年8月广州市四校联考试卷

# 数　学

**命题学校：广东市广雅中学**

**本试卷共22小题，满分150分，考试用时120分钟.**

**注意事项：**

**1. 答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内.**

**2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上.**

**3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效.**

**4. 考生必须保持答题卡的整洁.**

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x||x-2|<2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=3+4\mathrm{i}$，则 $\dfrac{\bar{z}}{z-3}=$（　　）

A. $1+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$　　B. $1-\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$　　C. $-1+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$　　D. $-1-\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 具有性质（　　）

A. 最大值为2，图象关于 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称　　B. 最大值为 $\sqrt{2}$，图象关于 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称

C. 最大值为2，图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称　　D. 最大值为 $\sqrt{2}$，图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称

4. 一个圆柱的侧面展开图是一个面积为 $4\pi^2$ 的正方形，则这个圆柱的体积为（　　）

A. $\pi$　　B. $2\pi$　　C. $\pi^2$　　D. $2\pi^2$

5. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}-\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{5}\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{7}{8}$　　B. $\dfrac{7}{8}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

6. 已知函数 $y=\log_a(x-1)+1$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象恒过定点 $A$，若点 $A$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 上，则 $m+n$ 的最小值为（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 9　　D. 8

7. 2020 年新冠肺炎肆虐，全国各地千千万万的医护者成为“最美逆行者”，医药科研工作者积极研制有效抗疫药物，中医药通过临床筛选出的有效方剂“三药三方”（“三药”是指金花清感颗粒、连花清瘟颗粒（胶囊）和血必净注射液；“三方”是指清肺排毒汤、化湿败毒方和宣肺败毒方）发挥了重要的作用.甲因个人原因不能选用血必净注射液，甲、乙两名患者各自独立自主的选择一药一方进行治疗，则两人选取药方完全不同的概率是（　　）

A. $\dfrac{4}{9}$　　B. $\dfrac{8}{27}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{5}{9}$

8. 已知点 $Q$ 在圆 $E$：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 上，椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点为 $F$，点 $P$ 在椭圆 $C$ 上，且圆 $E$ 上的所有点均在椭圆 $C$ 外，若 $|PQ|-|PF|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}-6$，且椭圆 $C$ 的长轴长恰与圆 $E$ 的直径长相等，过点 $F$ 作圆 $E$ 的切线，则切线斜率为（　　）

A. $\pm 2$　　B. $\dfrac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$　　C. $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 如图是 2021 年青年歌手大奖赛中，七位评委为甲、乙两名选手打出的分数的茎叶图（其中 $m$、$n$ 均为数字 0~9 中的一个），在去掉一个最高分和一个最低分后，则有（　　）

| 甲 | | 乙 |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 1 |
| 9 m 5 5 1 | 8 | 1 2 4 4 7 |
| n | 9 | 9 |

A. 甲选手得分的平均数一定大于乙选手得分的平均数

B. 甲选手得分的中位数一定大于乙选手得分的中位数

C. 甲选手得分的众数与 $m$ 的值无关

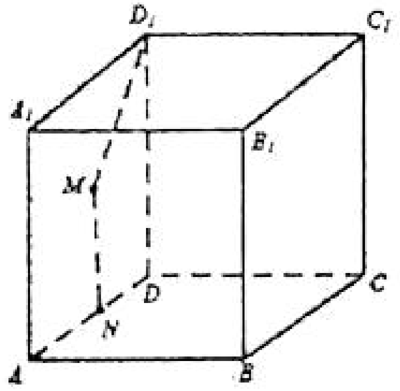
D. 甲选手得分的方差与 $n$ 的值无关

10. 已知向量 $\vec{a}=\left(1,\sin\theta\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\theta,\sqrt{2}\right)$，则下列命题正确的是（　　）

A. 存在 $\theta$，使得 $\vec{a}//\vec{b}$　　B. 当 $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直

C. 对任意 $\theta$，都有 $\left|\vec{a}\right|\neq\left|\vec{b}\right|$　　D. 当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}$ 时，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

11. 如图，点$M$是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中的侧面$ADD_1A_1$内（包括边界）的一个动点，则下列结论正确的是（　　）




A. 满足$BM \perp A_1D$的点$M$的轨迹是一条线段

B. 在线段$AD_1$上存在点$M$，使异面直线$B_1M$与$CD$所成的角是$30°$

C. 若正方体的棱长为1，三棱锥$B-C_1MD$的体积最大值为$\frac{1}{3}$

D. 点$M$存在无数个位置满足到直线$AD$和直线$C_1D_1$的距离相等

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases} e^x-1, x \ge m \\ -(x+2)^2, x<m \end{cases}(m \in R)$，则（　　）

A. 对任意的$m \in R$，函数$f(x)$都有零点.

B. 当$m \le -3$时，对$\forall x_1 \ne x_2$，都有$\left(x_1-x_2\right)\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)<0$成立.

C. 当$m=0$时，方程$f\left[f(x)\right]=0$有4个不同的实数根.

D. 当$m=0$时，方程$f(x)+f\left(-x\right)=0$有2个不同的实数根.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知双曲线$C$：$\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$，则双曲线$C$的实轴长为__________.

14. 已知二项式$\left(2x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式的二项式系数和为64，则展开式中的有理项系数和为__________.

15. 函数$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$的图象在点$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$处的切线与直线$x-ay+1=0$垂直，则非零实数$a$的值为

__________.

16. 设正整数$n=a_0 \cdot 2^0+a_1 \cdot 2^1+\cdots+a_{k-1} \cdot 2^{k-1}+a_k \cdot 2^k$，其中$a_{\mathrm{i}} \in \left\{0,1\right\}$，$\mathrm{i}=0,1,2,\cdots,k$，记$\omega\left(n\right)=a_0+a_1+\cdots+a_k$.若$m=a_0 \cdot 2^0+a_1 \cdot 2^1+\cdots+a_9 \cdot 2^9+2^{10}$且$\omega\left(m\right)=3$，则这样的正整数$m$有__________个，所有的这样的正整数$m$的和为____________.（用数字作答）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等比数列$\{a_n\}$是递增数列，满足$a_4=32$，$a_3+a_5=80$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

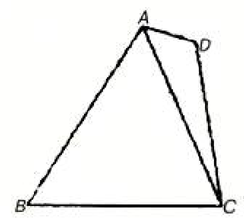
（2）设$b_n=\log_2 a_n$，若$b_n$为数列$\{c_n\}$的前$n$项积，证明$\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}=1$.

18. 党中央，国务院高度重视新冠病毒核酸检测工作，中央应对新型冠状病毒感染肺炎疫情工作领导小组会议作出部署，要求尽力扩大核酸检测范围，着力提升检测能力.根据统计发现，疑似病例核酸检测呈阳性的概率为$p(0<p<1)$.现有 6 例疑似病例，分别对其取样、检测，既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验，混合样本中只要有病毒，则化验结果呈阳性.若混合样本呈阳性，则需将该组中备用的样本再逐个化验；若混合样本呈阴性，则判定该组各个样本均为阴性，无需再化验.现有以下三种方案：方案一：6 个样本逐个化验；方案二：6 个样本混合在一起化验；方案三：6 个样本均分为两组，分别混合在一起化验.在新冠肺炎爆发初期，由于检测能力不足，化验次数的期望值越小，则方案越“优”.

（1）若$p=\dfrac{1}{3}$，按方案一，求 6 例疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率；

（2）若$t=(1-p)^3$，现将该 6 例疑似病例样本进行化验，当方案三比方案二更“优”时，求$t$的取值范围.

19. 如图所示，在四边形$ABCD$中，$\angle D=2\angle B$，且$AD=1$，$CD=3$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



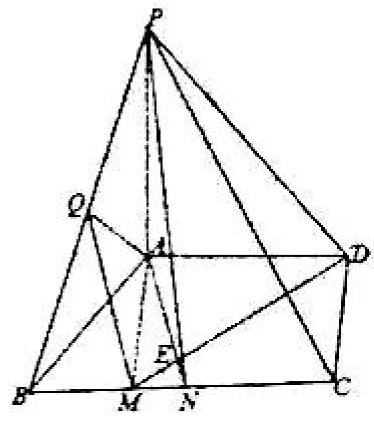

（1）若$BC=\sqrt{6}$，求$AB$的长；

（2）求四边形$ABCD$面积的最大值.

20. 在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AD//BC$，$BC\perp CD$，$PA=AD=2$，$BC=3CD=3$，点$M$，$N$在线段$BC$上，满足$BM=2MN=1$，$AN\bigcap MD=E$.

（1）求证：$PN\perp MD$；

（2）若$Q$为线段$PB$上的一点，且$PD//$平面$AQM$，求平面$QAM$与平面$PAN$所成锐二面角的余弦值.



21. 已知抛物线$C$：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为$F$，$M\left(n,2\right)$为抛物线$C$上的一点，且$\left|MF\right|=2$.

（1）求抛物线$C$的标准方程；

（2）过点$F$的直线$m$与抛物线$C$交于$A$，$B$两点，点$P$在抛物线$C$上，记直线$PA$的斜率为$k_1$，直线$PB$的斜率为$k_2$，试判断是否存在点$P$，使得$k_1+k_2=2$？若存在，求出点$P$的个数；若不存在，请说明理由.

22. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2ax+\ln x$.

（1）若函数$f(x)$为增函数，求实数$a$的取值范围；

（2）设$g(x)=xf(x)-\dfrac{1}{2}x^3+2x$有两个不同零点$x_1$，$x_2$.

（i）证明：$x_1+x_2>\dfrac{1}{a}$；

（ii）若$x_2-3x_1\geq 0$，证明：$x_1+x_2>\dfrac{6}{e^2}$.

# 参考答案

一、选择题（本大题12小题，每小题5分，共60分.其中第1题~第10题为单项选择题，在给出的四个选项中，只有一项符合要求；第11题和第12题为多项选择题，在给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得5分，选对但不全的得3分，有选错的得0分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | D | C | D | A | C | A | B | ABD | BD | ACD | AC |

二、填空题（本大题4小题，每小题5分，共20分）

13. $2\sqrt{3}$　　14. 65　　15. -1　　16. 45，55287

三、解答题（本大题6小题，共70分）

17.（1）可设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$，$\because a_4=32$，$\therefore a_3+a_5=\frac{32}{q}+32q=80$.

解得：$q=2$或$q=\frac{1}{2}$（舍去）.

所以$a_n=a_4\cdot 2^{n-4}=2^{n+1}$.

（2）$\because b_n=\log_2 a_n=n+1$，$\therefore c_1=b_1=2$，

当$n\geq 2$时，$c_1\cdot c_2\cdots\cdots c_n=n+1$①，$c_1\cdot c_2\cdots\cdots c_{n-1}=n$②，

①/②得$c_n=\frac{n+1}{n}(n\geq 2)$，

当$n=1$时，$c_1=\frac{2}{1}=2$也成立，$\therefore c_n=\frac{n+1}{n}$，

$\therefore \frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}=1$.

18.（1）用$X$表示6例疑似病例中化验呈阳性的人数，则随机变量$X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，

由题意可知：$P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-C_6^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{665}{729}$.

答：6例疑似病例中至少有1例呈阳性的概率为$\frac{665}{729}$.

（2）方案二：混合一起检验，记检验次数为$\xi$，则$\xi=1,7$.

$\therefore P(\xi=1)=t^2$，$P(\xi=7)=1-t^2$，

$\therefore E(\xi)=t^2+7\left(1-t^2\right)=7-6t^2$.

方案三：每组的三个样本混合在一起化验，记检验次数为$\eta$，则$\eta=2,5,8$.

$\therefore P(\eta=2)=t^2$，$P(\eta=5)=2t(1-t)$，$P(\eta=8)=(1-t)^2$，

$\therefore E(\eta)=2t^2+10t(1-t)+8(1-t)^2=8-6t$，

$\because E(\eta)<E(\xi)$，$\therefore 8-6t<7-6t^2$，$\therefore 6t^2-6t+1<1$，$\therefore \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<t<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$，

$\therefore t$的取值范围$\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<t<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$.

19.（1）$\because \angle D=2\angle B$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \cos D=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$，

$\because$在$\triangle ACD$中，$AD=1$，$CD=3$，$\cos D=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$由余弦定理可得$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D=1+9-2\times3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$，$AC=2\sqrt{3}$，

在$\triangle ABC$中，$BC=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{AB^2+6-12}{2\cdot AB\times\sqrt{6}}$，

化简得$AB^2-2\sqrt{2}AB-6=0$，解得$AB=3\sqrt{2}$.故$AB$的长为$3\sqrt{2}$.

（2）设四边形$ABCD$面积为$S$，则$S=S_{\triangle BAC}+S_{\triangle DAC}$，

$\because S_{\triangle DAC}=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\cdot\sin D=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\cdot\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{2}$，

所以$S=S_{\triangle BAC}+\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin B+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}BA\cdot BC+\sqrt{2}$，

在$\triangle ABC$中，$AC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$由余弦定理可得：

$AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cdot\cos B$，

即$AB^2+BC^2-12=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AB\cdot BC\geq 2AB\cdot BC-12$，

$\therefore AB\cdot BC\le \dfrac{12}{2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=9+3\sqrt{3}$，

当且仅当$\therefore AB=BC=\sqrt{9+3\sqrt{3}}$时，$\left(S_{\triangle BAC}\right)_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times(9+3\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$，

所以$S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{2}$.

20.（1）证明：$\because PA\perp$平面$ABCD$，$MD\subset$平面$ABCD$，$\therefore MD\perp PA$，

$\because AD//BC$，$BC\perp CD$，$AD=2$，$BC=3$，$BM=1$，$MC=2=AD$，

$\therefore$四边形$ADCM$为矩形.

$\because \dfrac{AM}{AD}=\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle NAM=\angle MDA=\angle DMC$，$\therefore \angle DMC+\angle ANM=90^\circ$，$\therefore DM\perp AN$，

$\because PA\cap AN=A$，$PA,AN\subset$平面$PAN$，$\therefore MD\perp$平面$PAN$，

$\because PN\subset$平面$PAN$，$\therefore PN\perp MD$.

（第一问直接用向量法，也相应给分）

（2）连接$BD$交$AM$于点$E$，连接$QE$.

$\because \triangle BME\sim\triangle DAE$，$\therefore \dfrac{BE}{ED}=\dfrac{ME}{EA}=\dfrac{1}{2}$，

$\because PD//$平面$AQM$，$PD\subset$平面$PBD$，平面$AQM\cap$平面$PBD=QE$，

$\therefore QE//PD$，$\therefore \dfrac{BQ}{BP}=\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{1}{3}$，

如图建立空间直角坐标系，则

$A(0,0,0)$，$M(1,0,0)$，$P(0,0,2)$，$N\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$B(1,-1,0)$，$Q\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，$D(0,2,0)$，

由（1）知$MD\perp$平面$PAN$，则$\overrightarrow{MD}=(-1,2,0)$为平面$PAN$的一个法向量.

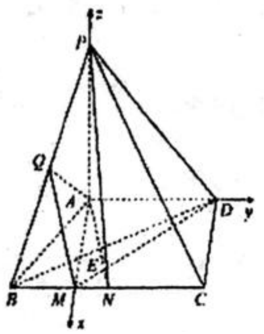
$\because \overrightarrow{AM}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，

设平面$QAM$的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{3}z=0\end{cases}$，取$\vec{m}=(0,1,1)$，

设平面$QAM$与平面$PAN$所成锐二面角为$\theta$，$\therefore \cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{MD}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MD}\right|}=\frac{|0-2+0|}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore$平面$QAM$与平面$PAN$所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.




21.（1）根据题意抛物线$C$的方程为$y^2=2px\left(p>0\right)$，

则$|MF|=n+\frac{p}{2}=2$，$2pn=4$，解得$p=2$，$n=1$，

所以抛物线$C$的标准方程为$y^2=4x$.

（2）由题意知，$F\left(1,0\right)$，直线$m$的斜率不为 0，可设直线$m$的方程为$x=ty+1$，

联立方程得$\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+1\end{cases}$，消去$x$并化简得$y^2-4ty-4=0$，

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$P\left(x_0,y_0\right)$，则$y_1+y_2=4t$，$y_1\cdot y_2=-4$.

因为$A$，$P$两点在抛物线$C$上，所以$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_0^2=4x_0\end{cases}$，

所以$k_1=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\frac{4}{y_0+y_1}$，同理可得$k_2=\frac{4}{y_0+y_2}$，则

$$k_1+k_2=\frac{4}{y_1+y_0}+\frac{4}{y_2+y_0}=\frac{4\left(y_1+y_2+2y_0\right)}{\left(y_1+y_0\right)\left(y_2+y_0\right)}=\frac{4\left(y_1+y_2+2y_0\right)}{y_1y_2+y_0\left(y_1+y_2\right)+y_0^2}=\frac{4\left(4t+2y_0\right)}{-4+4ty_0+y_0^2}=2,$$

所以$8t+4y_0=-4+4ty_0+y_0^2$，即$y_0^2+(4t-4)y_0-8t-4=0\left(*\right)$，

因为$\Delta=(4t-4)^2+4(8t+4)=16\left(t^2+2\right)>0$，所以方程$\left(*\right)$有两个不同的解，

故满足$k_1+k_2=2$的点$P$的个数为 2.

22.（1）$\because f(x)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=x-2a+\frac{1}{x}$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $\left(0,+\infty\right)$ 上的增函数，

$\therefore f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2a\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-2a=2-2a\geq 0$，$\therefore a\leq 1$.

$\therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是 $a\leq 1$.

（2）（i）$\because g(x)=x(\ln x+2-2ax)=0$，$\therefore \ln x+2-2ax=0(x>0)$ 的两个根为 $x_1$，$x_2$.

不妨设 $x_2>x_1>0$，

$\therefore \begin{cases}\ln x_1+2=2ax_1\\ \ln x_2+2=2ax_2\end{cases}$，$\therefore 2a\left(x_2-x_1\right)=\ln x_2-\ln x_1$ .$\therefore a=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{2\left(x_2-x_1\right)}$，

要证：$x_1+x_2>\dfrac{1}{a}$，

只需证 $x_1+x_2>\dfrac{2\left(x_2-x_1\right)}{\ln x_2-\ln x_1}\Leftrightarrow \ln x_2-\ln x_1>\dfrac{2\left(x_2-x_1\right)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}$.

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$F(x)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$.

$\therefore F'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ 在 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 恒成立，$\therefore F(x)$ 在 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 为增函数，$\therefore F(x)>f\left(1\right)=0$，

$\therefore x_1+x_2>\dfrac{1}{a}$.

（ii）$\because x_2-3x_1\geq 0$，$\therefore t=\dfrac{x_2}{x_1}\geq 3$，

$\because \begin{cases}\ln x_1+2=2ax_1\\ \ln x_2+2=2ax_2\end{cases}$，$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4=2a\left(x_2+x_1\right)$，

$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\left(x_1+x_2\right)$，$\therefore \ln\left(x_1x_2\right)+4=\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}+1}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，

令 $G(x)=\dfrac{(t+1)}{t-1}\ln t(t\geq 3)$，$\therefore G'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}(t\geq 3)$，

令 $h(t)=t-\frac{1}{t}-\ln t(t\geq 3)$ ， $\therefore h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}\geq 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 为增函数，$\therefore h(x)\geq h(3)>h(1)=0$ ， $\therefore G'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}>0$ ，

$\therefore G(x)$ 在 $t\in\left[3,+\infty\right)$ 为增函数，$\therefore G(x)\geq G(3)=2\ln 3=\ln 9$ .

$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4\geq \ln 9$ ， $\therefore \ln\left(x_1\cdot x_2\right)\geq \ln\frac{9}{e^4}$ ， $\therefore x_1\cdot x_2\geq \frac{9}{e^4}$ ，

$\therefore x_1+x_2>2\sqrt{x_1\cdot x_2}=2\sqrt{\frac{9}{e^4}}=\frac{6}{e^2}$ ，

$\therefore x_1+x_2>\frac{6}{e^2}$ .