

## 广州市普通高中毕业班综合测试 (二)

### 数学

(本试卷共 6 页, 22 小题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.)

#### 注意事项:

1. 答卷前, 考生必须用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡相应的位置上.

2. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题同的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号; 不能答在试卷上.

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 涉及作图的题目, 用 2B 铅笔画图. 答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 改动的答案也不能超出指定的区域. 不准使用铅笔、圆珠笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.

4. 考生必须保持答题卡的整洁, 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合  $P = \{x | x < 3\}$ ,  $Q = \{x | -2 < x < 2\}$ , 则 ( )

- A.  $P \subseteq Q$                       B.  $Q \subseteq P$                       C.  $P \cap Q = P$                       D.  $P \cup Q = Q$

2. 某中学甲、乙、丙、丁四名同学去 A、B、C、D 四个社区展开“厉行节约, 反对餐饮浪费”宣传活动, 每名同学只去一个社区, 每个社区一名同学. 甲说我不去 A 社区, 乙说我不去 A 社区也不去 D 社区, 丙说我不去 B 社区. 若甲、乙、丙三人中只有甲和乙说了真话, 则去 D 社区的是 ( )

- A. 甲                      B. 乙                      C. 丙                      D. 丁

3. 已知  $z_1, z_2$  都是复数,  $z_2$  的共轭复数为  $\overline{z_2}$ , 下列命题中, 真命题的是

( )

- A. 若  $|z_1| = |z_2|$ , 则  $z_1 = z_2$       B. 若  $z_1 > z_2$ , 则  $|z_1| > |z_2|$   
C. 若  $z_1 = z_2$ , 则  $z_1 = \overline{z_2}$       D. 若  $z_1 = \overline{z_2}$ , 则  $z_1 + z_2$  为实数

4. 已知第二象限角  $\theta$  的终边上有两点  $A(-1, a)$ ,  $B(b, 2)$ , 且  $\cos \theta + 3 \sin \theta = 0$ , 则  $3a - b =$  ( )

- A. -7      B. -5      C. 5      D. 7

5.  $(x^2+1)(2x-\frac{1}{x})^6$  展开式的常数项是 ( )

- A.160                      B.100                      C.-100                      D. -160

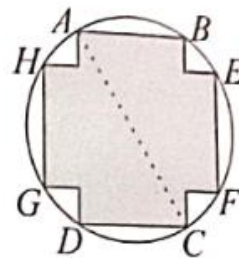
6. 已知函数  $f(x) = xe^x + \frac{x}{e^x}$ , 且  $f(1+a) + f(-a^2+a+2) > 0$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$       B.  $(-1, 3)$   
C.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$       D.  $(-3, 1)$

7. 学生到工厂参加实践劳动，用薄铁皮制作一个圆柱体，圆柱体的全面积为  $8\pi$ ，则该圆柱体的外接球的表面积的最小值是（ ）

- A.  $4(\sqrt{5}-1)\pi$       B.  $8(\sqrt{5}-1)\pi$       C.  $4(\sqrt{5}+1)\pi$       D.  $8(\sqrt{5}+1)\pi$

8. 如图，有一种变压器，铁芯的截面是正十字形（阴影部分，其中矩形  $ABCD$  绕其对称中心，按顺时针方向旋转  $90^\circ$  后与矩形  $EFGH$  重合），已知  $AB=2$ ，正十字形有一个外接圆，从外接圆内部随机取一点，此点取自正十字形

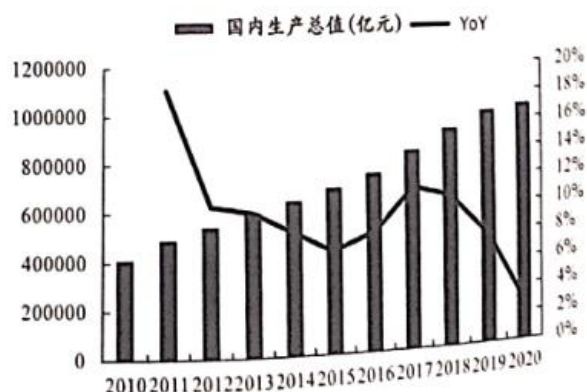


的概率为  $\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\pi}$ ，则  $\tan \angle ACD =$  ( )

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，

有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。）

9. 2020 年，中国经济在疫情阻击战的基础上实现了正增长，国内生产总值首次突破百万亿大关.根据中国统计局官方提供的数据，2010 年~2020 年，中国国内生产总值（单位：亿元）的条形图和国内生产总值年增长率（YoY）的折线图如图，根据该图，下列结论正确的是（ ）



- A. 2017 年国内生产总值的年增长率最大  
B. 2011 年国内生产总值的年增长率最大  
C. 这 11 年国内生产总值的年增长率不断减小  
D. 这 11 年国内生产总值的年增长率逐年增长



10. 过双曲线  $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的左焦点  $F$  作直线  $l$  交  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点, 则 ( )

A. 若  $|AB|=1$ , 则直线  $l$  只有 1 条

B. 若  $|AB|=2$ , 则直线  $l$  有 2 条

C. 若  $|AB|=3$ , 则直线  $l$  有 3 条

D. 若  $|AB|=4$ , 则直线  $l$  有 4 条

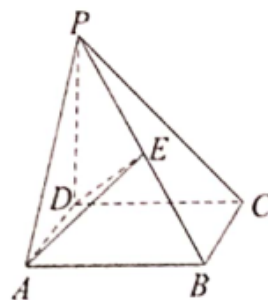
11. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面为矩形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD=1$ ,  $PD=AB=2$ , 点  $E$  是  $PB$  的中点, 过  $ADE$  三点的平面  $\alpha$  与平面  $PBC$  的交线为  $l$ , 则 ( )

A.  $l \parallel$  平面  $PAD$

B.  $AE \parallel$  平面  $PCD$

C. 直线  $PA$  与  $l$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. 平面  $\alpha$  截  $P-ABCD$  四棱锥所得的上、下两部分几何体的体积之比为  $\frac{3}{5}$



12. 对于函数  $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 1, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ -f(x-1), & x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \end{cases}$ , 则下列结论正确的是 ( )

A. 任取  $x_1, x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$  恒成立

B.  $f(0) + f(2) + f(4) + f(6) \cdots + f(2020) = 2 - \frac{1}{2^{1010}}$

C. 对任意  $x > 0$ , 不等式  $f(x) \leq \frac{k}{x}$  恒成立, 则实数  $k$  的取值范围是  $[1, +\infty)$

D. 函数  $y = f(x) - \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$  有且仅有 2 个零点

三、填空题 ( 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. )

13. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_3 = 2$ ,  $a_4 + a_5 = 10$ , 则  $\log_2 a_6 =$ \_\_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 3$ , 点  $D$  在  $AC$  上, 且

$AD=2DC$ , 则  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ \_\_\_\_\_.

15. 若直线  $y = -2x + \frac{2}{3}$  与曲线  $y = \frac{1}{3}x^3 - ax$  相切, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两个焦点为  $F_1(-2, 0)$  和  $F_2(2, 0)$ . 直线  $l$  过点  $F_1$ ,  $F_2$  点关于直线  $l$  对称点  $A$  在  $C$  上, 且  $(\overrightarrow{F_1A} + 2\overrightarrow{F_1F_2}) \cdot \overrightarrow{AF_2} = 8$ , 则  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.

四、解答题 ( 本大题共 6 小题, 满分 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. )

17. ( 本题满分 10 分 )

已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $S_{n+1} + 2S_{n-1} = 3S_n (n \geq 2)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

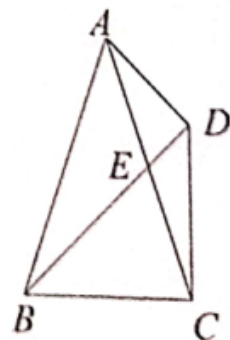
18. ( 本题满分 12 分 )

如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $\triangle BCD$  是等腰直角三角形,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,

$\angle ADB = 90^\circ$ ,  $\sin \angle ADB = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $BD = 2$ ,  $AC$  与  $BD$  交于点  $E$ .

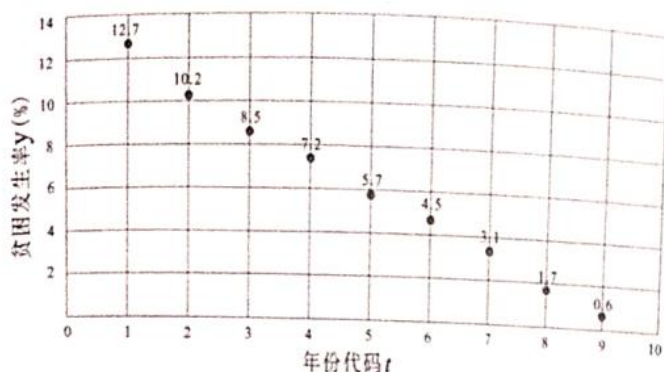
(1) 求  $\sin \angle ACD$ ;

(2) 求  $\triangle ABE$  的面积.



19. (本题满分 12 分)

习近平总书记指出:在扶贫的道路上,不能落下任何一个贫困家庭,丢下一个贫困群众.根据相关统计,2010 年以后中国贫困人口规模呈逐年下降趋势,2011 年~2019 年,全国农村贫困发生率的散点图如下:



注: 年份代码 1 ~ 9 分别对应年份 2011 年~ 2019 年.

(1) 求  $y$  关于  $t$  的回归直线方程 (系数精确到 0.01);

(2) 已知某贫困地区的农民人均年纯收入  $X$  (单位: 万元) 满足正态分布  $N(1.6, 0.36)$ , 若该地区约有 97.72% 的农民人均年纯收入高于该地区最低人均年纯收入标准, 则该地区最低人均年纯收入标准大约为多少万元? .

参考数据与公式:  $\sum_{i=1}^9 y_i = 54.2$ ,  $\sum_{i=1}^9 t_i y_i = 183.6$

回归方程  $\hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}$  中斜率和截距的最小二乘估计分别为  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n \bar{t} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$

,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ . 若随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6826$ ;

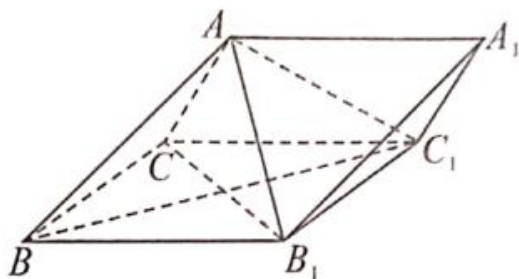
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9544$ ;  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$ .

20. (本题满分 12 分)

如图, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的侧面  $BB_1C_1C$  是菱形,  $\angle ABB_1 = \angle ABC$ .

(1) 求证:  $B_1C \perp$  平面  $ABC_1$ ;

(2) 若  $BB_1 = B_1C = 2$ ,  $AB = AC_1$ , 且二面角  $B_1-AB-C$  为直二面角, 求三棱锥  $C_1-ABB_1$  的体积.



21. (本题满分 12 分)

已知抛物线  $C: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 上的点到点  $A(0, p)$  的距离的最小值为 2.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若点  $F$  是  $C$  的焦点, 过  $F$  作两条相互垂直的直线  $l_1, l_2$  与  $C$  交于  $M, N$  两点, 与  $C$  交于  $P, Q$  两点, 线段  $MN, PQ$  的中点分别是  $S, T$ , 是否存在定圆使得直线  $ST$  截该圆所得的线段长为定值? 若存在, 写出一个定圆的方程; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \ln(x+1) + a(x-1)^2$  ( $a > 0$ ).

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 证明: 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2n}{\sqrt{n+1}}$ .