

2020~2021 年佛山市普通高中高三教学质量检测 (一)

数 学 参 考 答 案 与 评 分 标 准

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	D	B	D	B	C

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分.

题号	9	10	11	12
答案	AB	ABD	ABD	CD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $y = ex - e$ 14. $\frac{3}{7}$ 15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 16. $\frac{125\pi}{6}$

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答须写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】选①:

由 $\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + 1$ 得 $\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = 1$,1 分

所以 $\{\log_2 a_n\}$ 是首项为 $\log_2 a_1 = 1$, 公差为 1 的等差数列,

所以 $\log_2 a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 故 $a_n = 2^n$3 分

又 $b_1 = 2$, $b_3 = 14$, $a_1 = 2$, $a_3 = 8$,

所以 $b_1 - a_1 = 0$, $b_3 - a_3 = 6$, 所以等差数列 $\{b_n - a_n\}$ 的公差 $d = \frac{(b_3 - a_3) - (b_1 - a_1)}{3-1} = 3$ 5 分

所以 $b_n - a_n = b_1 - a_1 + (n-1)d = 3(n-1)$,

所以 $b_n = 2^n + 3(n-1)$,7 分

$S_n = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - 3n = 2^{n+1} - 2 + \frac{3n^2 - 3n}{2}$ 9 分

由 $S_n > 2021$ 得 $n \geq 10$, 即存在正整数 k , 使得 $S_k > 2021$, 且 k 的最小值为 10.10 分

选②:

由 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 得 $a_2 - a_1 = 2^1$, $a_3 - a_2 = 2^2$, $a_4 - a_3 = 2^3$, $\cdots$, $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ ($n \geq 2$),1 分

相加得 $a_n - a_1 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n - 2$, 又 $a_1 = 2$, 所以 $a_n = 2^n$ ($n \geq 2$),

显然 $a_1 = 2$ 也满足 $a_n = 2^n$ ($n \geq 2$), 故 $a_n = 2^n$3 分

下同选①.

选③:

由 $a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n = 2a_n^2$ 整理得 $(a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1} + a_n) = 0$,1 分

又 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} = 2a_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n = 2^n$3 分
下同选①.

18. 【解析】(1) 设 $BC = x$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $28 = x^2 + 4 - 2 \times x \times 2 \times (-\frac{1}{2})$, 即 $x^2 + 2x - 24 = 0$,
解得 $x = 4$ 或 $x = -6$ (舍), 所以 $BC = 4$ 2 分

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 3 分

因为 $CD = \frac{5AB}{2}$, 所以 $S_{\triangle ADC} = \frac{5S_{\triangle ABC}}{2} = 5\sqrt{3}$ 4 分

则梯形 $ABCD$ 的面积 $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = 7\sqrt{3}$ 5 分

(2) 设 $\angle ABD = \alpha$, 则 $\angle BDC = \alpha$, $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle DBC = \frac{2\pi}{3} - \alpha$, $\angle BCA = \alpha - \frac{\pi}{6}$ 6 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{2}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})} = \frac{BC}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$ 7 分

在 $\triangle BDC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{5}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha}$ 8 分

两式相除得 $\frac{2\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)}{5\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$, 展开得 $\frac{2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha)}{5 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 9 分

所以 $5\sqrt{3} \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha \cos \alpha - 2\sqrt{3} \cos^2 \alpha = 0$, 即 $5\sqrt{3} \tan^2 \alpha - 7 \tan \alpha - 2\sqrt{3} = 0$ 10 分

解得 $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{5}$, 因为 $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即 $\tan \angle ABD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$12 分

19. 【解析】(1) 取 AC 中点 O , 连结 OM , OC_1 ,

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 M 为 AB 中点, O 为 AC 中点,

所以 $OM \parallel BC$, 且 $OM = \frac{1}{2} BC$,1 分

又 N 为 B_1C_1 中点, $BC \parallel B_1C_1$ 且 $BC = B_1C_1$,

所以 $C_1N \parallel BC$, 且 $C_1N = \frac{1}{2} BC$,2 分

所以 $OM \parallel C_1N$ 且 $OM = C_1N$, 从而四边形 $OMNC_1$ 为平行四边形.3 分

所以 $MN \parallel OC_1$,4 分

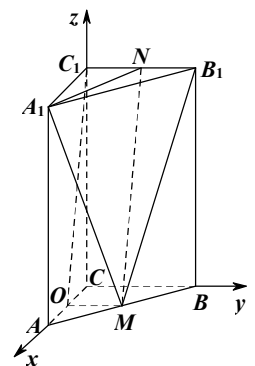
又 $MN \not\subset$ 平面 ACC_1A_1 , $OC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $MN \parallel$ 平面 ACC_1A_15 分

(2) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp AB$, $B_1M = 3\sqrt{2}$, $BB_1 = 4$,

所以 $BM = \sqrt{B_1M^2 - BB_1^2} = \sqrt{2}$, 故 $AB = 2\sqrt{2}$, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 从而 $AC \perp BC$6 分

以 C 为原点, 建立空间直角坐标系 $C - xyz$ 如图所示, 则 $M(1, 1, 0)$, $A_1(2, 0, 4)$, $B_1(0, 2, 4)$,

$N(0, 1, 4)$, $\overrightarrow{MB_1} = (-1, 1, 4)$, $\overrightarrow{MA_1} = (1, -1, 4)$, $\overrightarrow{MN} = (-1, 0, 4)$,7 分



设平面 MA_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{MB_1} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$,

令 $x = 1$, 得 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 0)$,8 分

设平面 MA_1N 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{MA_1} = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 4z \\ y = 8z \end{cases}$,

令 $z = 1$, 得 $\mathbf{n}_2 = (4, 8, 1)$,9 分

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{12}{\sqrt{2} \times 9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,11 分

所以二面角 $B_1 - A_1M - N$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$12 分

20. 【解析】(1) $\gamma \approx -0.58$, y 与 x 的相关关系为负相关,2 分

且 $|\gamma| < 0.75$, 故线性相关性不强, 所以不建议继续做线性回归分析,

得到回归方程, 拟合效果也会不理想. (相关指数 $R^2 \approx 0.3364$)4 分

(2) 建立 2×2 列联表如下

	人数 < 100	人数 ≥ 100	合计
AQI > 100	10	5	15
AQI ≤ 100	10	35	45
合计	20	40	60

.....8 分

代入公式计算得 $K^2 = \frac{60 \times (350 - 50)^2}{15 \times 45 \times 20 \times 40} = 10$ 10 分

查表知 $6.635 < 10 < 10.828$, 故犯错率在 0.001 与 0.01 之间,

所以该初步认定的犯错率小于 1%.12 分

21. 【解析】(1) 依题意知 $A(-2, 0)$ 为椭圆 C 的左顶点, 故 $a = 2$,1 分

又 $F(1, 0)$ 为 C 的右焦点, 所以 $a^2 - b^2 = 1$, 于是 $b^2 = 3$,3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

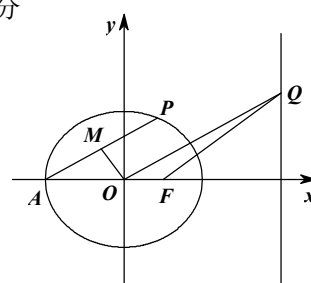
(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq \pm 2$), 则 $M(\frac{x_0 - 2}{2}, \frac{y_0}{2})$,5 分

直线 AP 的斜率 $k = \frac{y_0}{x_0 + 2}$,6 分

又 $OQ \parallel AP$, 所以直线 OQ 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}x$,7 分

令 $x = 4$ 得 $Q(4, \frac{4y_0}{x_0 + 2})$,8 分

$\overrightarrow{OM} = (\frac{x_0 - 2}{2}, \frac{y_0}{2})$, $\overrightarrow{FQ} = (3, \frac{4y_0}{x_0 + 2})$,



$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FQ} = \frac{3(x_0 - 2)}{2} + \frac{2y_0^2}{x_0 + 2} = \frac{3(x_0^2 - 4) + 4y_0^2}{2(x_0 + 2)} (*) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又 P 在 C 上, 所以 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 即 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$, 代入 $(*)$ 得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$, 所以 $OM \perp QF$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

故直线 OM 与 QF 的交点在以 OF 为直径的圆上, 且该圆方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

即直线 OM 与直线 QF 的交点在某定曲线 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 【解析】(1) $f'(x) = a \cos ax - a \cos x = a(\cos ax - \cos x) = -2a \sin \frac{a+1}{2}x \sin \frac{a-1}{2}x \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

若 $a > 1$, 则 $f'(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 至少有 $x_1 = \frac{2\pi}{a+1}, x_2 = \frac{4\pi}{a+1}$ 两个变号零点, 故 $0 < a < 1$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_m = \frac{2m\pi}{a+1}, x_n = \frac{2n\pi}{1-a}$, 其中 $m, n \in \mathbf{Z}$, 仅当 $m = 1$ 时, $x_1 = \frac{2\pi}{a+1} \in (0, 2\pi)$,

且在 x_1 的左右两侧, 导函数的值由正变负,

故 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 有唯一极值点 $x_0 = \frac{2\pi}{a+1}$, 此时 $f(x_0) = \sin ax_0 - a \sin x_0 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

[方法 1] 将 $x_0 = \frac{2\pi}{a+1}$ 代入得 $f(x_0) = \sin \frac{2a\pi}{a+1} - a \sin \frac{2\pi}{a+1} = \sin \frac{2a\pi}{a+1} + a \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{a+1}\right)$

$= (1+a) \sin \frac{2a\pi}{a+1} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

① 当 $\frac{2a}{a+1} \leq \frac{1}{2}$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, $2a\pi \leq (1-a)\pi$, 由不等式: $x > 0$ 时, $x > \sin x$ (*) 知:

$(1+a) \sin \frac{2a\pi}{a+1} < (1+a) \frac{2a\pi}{a+1} = 2a\pi \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

② 当 $\frac{2a}{a+1} > \frac{1}{2}$, 即当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时, $(1-a)\pi < 2a\pi$,

$(1+a) \sin \frac{2a\pi}{a+1} = (1+a) \sin \left(\pi - \frac{2a\pi}{a+1}\right) = (1+a) \sin \frac{(1-a)\pi}{a+1}$

由不等式 (*) 知: $(1+a) \sin \frac{(1-a)\pi}{a+1} < (1+a) \frac{(1-a)\pi}{a+1} = (1-a)\pi$,

由①②知 $f(x_0) < \min\{2a\pi, (1-a)\pi\}$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

[方法 2] 由 $x_0 = \frac{2\pi}{a+1} \Rightarrow ax_0 = 2\pi - x_0, a = \frac{2\pi}{x_0} - 1$, 代入得

$f(x_0) = \sin ax_0 - a \sin x_0 = \sin(2\pi - x_0) - \left(\frac{2\pi}{x_0} - 1\right) \sin x_0$, 即 $f(x_0) = -\frac{2\pi}{x_0} \sin x_0$

以下用分析法可证: $f(x_0) < \min\{2a\pi, (1-a)\pi\}$.

(2) ① 当 $a > 1$ 时, $f\left(\frac{\pi}{a}\right) = \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{a}\right) - a \sin \frac{\pi}{a} = -a \sin \frac{\pi}{a} < 0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3a\pi}{2}\right) + a > 0,$

所以 $f\left(\frac{\pi}{a}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$,7 分

由零点存在性定理知, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{a}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 至少有一个零点;8 分

②当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $\pi < \frac{\pi}{a} < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < a\pi < \pi$, $\pi < 2a\pi < 2\pi$,

$f\left(\frac{\pi}{a}\right) = -a \sin \frac{\pi}{a} > 0$, $f(\pi) = \sin a\pi > 0$, $f(2\pi) = \sin 2a\pi < 0$,9 分

由零点存在性定理知, $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 至少有一个零点;10 分

③当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = a \cos ax - a \cos x = a(\cos ax - \cos x)$,

令 $g(x) = \cos ax - \cos x$, 则 $g'(x) = -a \sin ax + \sin x$,

在区间 $(0, \pi)$ 上, $\cos ax > \cos x$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数;

在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 递减, 即 $f'(x)$ 递减, $f'(x) < f'(2\pi) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递增, 在 $(x_0, 2\pi)$ 上递减,

又 $f(0) = 0$, $f(2\pi) = \sin 2a\pi \geq 0$, 即在 $(\pi, 2\pi)$ 上, $f(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 没有零点, 满足题意.11 分

综上所述, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 没有零点, 则正数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$12 分