

高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查一元二次不等式的解法与集合的交集,考查运算求解能力.

由 $x^2 - x - 6 > 0$, 得 $x < -2$ 或 $x > 3$, 则 $A \cap B = \{4, 5\}$.

2. C 【解析】本题考查向量共线的条件,考查运算求解能力.

因为 $-2 \times (-6) - 3 \times 4 = 0$, 所以向量 $a = (-2, 3)$ 与向量 $(4, -6)$ 共线.

3. C 【解析】本题考查统计图表的识别,考查读图能力.

由图可知,对于神舟十二号太空之旅,46.6%的受访青少年关注航天员是怎样选的,有将近一半的青少年关注此问题,所以 A 错误. 而 $75.3\% < 0.8$, $64.6\% < 0.7$, 所以 B, D 均错误. 对于神舟十二号太空之旅,很多青少年都特别关注航天员,有 74.4%的受访青少年关注他们在太空的工作和生活,所以 C 正确.

4. B 【解析】本题考查复数的模,考查待定系数法的应用.

设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0)$, 因为 $2i\bar{z} = z^2$, 所以 $2i(a - bi) = a^2 - b^2 + 2abi$,

则 $2a = 2ab, a^2 - b^2 = 2b$, 又 $b \neq 0$, 解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a^2=3, \\ b=1, \end{cases}$ 故 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

5. D 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查逻辑推理能力.

因为 $f(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2x}, f(x+1) = \frac{1}{2x+1}, g(x+1) = x^2 - 1, g(x-1) = (x-2)^2 - 1$,

所以 $f(x + \frac{1}{2})$ 为奇函数, $g(x+1)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 与 $g(x-1)$ 均为非奇非偶函数.

6. B 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $\tan(\alpha + 2\beta) = 3, \tan(\alpha - \beta) = 2$, 所以 $\tan 3\beta = \tan[(\alpha + 2\beta) - (\alpha - \beta)] = \frac{3-2}{1+3 \times 2} = \frac{1}{7}$,

所以 $\tan(\alpha + 5\beta) = \tan[(\alpha + 2\beta) + 3\beta] = \frac{3 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{11}{2}$.

7. A 【解析】本题考查正态分布与二项分布的应用,考查抽象概括能力.

因为 X (单位:克) 服从正态分布 $N(400, 4)$, 所以 $P(X > 400) = \frac{1}{2}$.

设 4 袋海藻碘食用盐中质量超过 400 克的袋数为 Y , 则 $Y \sim B(4, \frac{1}{2})$, 则至少有 2 袋的质量超过 400 克的概

率为 $1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - (1 - \frac{1}{2})^4 - C_4^1 (1 - \frac{1}{2})^3 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$.

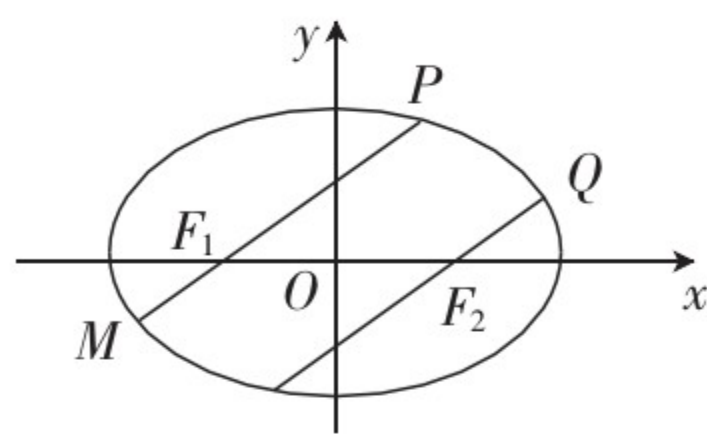
8. C 【解析】本题考查椭圆的性质,考查直观想象与数学运算的核心素养.

如图,延长 PF_1 交 C 于 M ,

根据椭圆的对称性可知 $|QF_2| = |F_1M|$,

则 $|PF_1| + |QF_2| = |PF_1| + |MF_1| = |PM|$,

因为焦点弦 PM 长度的最小值为 $\frac{2b^2}{a} \geq b$, 所以 $\frac{b}{a} \geq \frac{1}{2}$, 则 $0 < e = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.



9. BCD 【解析】本题考查直线与圆以及等差数列,考查运算求解能力与推理论证能力.

因为直线 $3x + 4y + n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 与圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = a_n^2 (a_n > 0)$ 相切, 所以 $a_n = \frac{n+6}{5}$, 则 $a_1 = \frac{7}{5}$, 数列

$\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{1}{5}$ 的等差数列. 因为 $a_n = \frac{n+6}{5}$, 所以 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 $\frac{1}{5} \times \frac{10 \times (7+16)}{2} = 23$. 又 $a_4 = 2$, 所以

当 $n=4$ 时, 圆 C 可能经过坐标原点.

10. AC 【解析】本题考查简单几何体的体积的应用,考查运算求解能力与空间想象能力.

棱长为 6 cm 的正四面体的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times \sqrt{6^2 - (6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3})^2} = 18\sqrt{2} (\text{cm}^3)$, 底面半径为 $\frac{3}{2}$ cm, 高为 6 cm 的圆柱的体积 $V_2 = \pi \times (\frac{3}{2})^2 \times 6 = \frac{27\pi}{2} (\text{cm}^3)$, 半径为 6 cm 的半球的体积 $V_3 = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} \times 6^3 = 144\pi (\text{cm}^3)$. 因为 $\frac{144\pi}{18\sqrt{2}} \times 2 = 8\sqrt{2}\pi \approx 35.5$, $\frac{144\pi}{\frac{27\pi}{2}} \times 2 = \frac{64}{3} \approx 21.3$, 所以这两碗馅料最多可包三角粽 35 个, 最多可包竹筒粽 21 个.

11. AD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质, 考查推理论证能力与数形结合的数学思想.

因为 $-\frac{\pi}{9} - (-\frac{5\pi}{18}) = \frac{1}{2} [\frac{2\pi}{9} - (-\frac{\pi}{9})] = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x)$ 在一个周期内的图象不经过点 C,

则 $T = \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 3$. 因为 $f(\frac{2\pi}{9}) = 1$, 所以 $\frac{2\pi}{9} \times 3 + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

12. ACD 【解析】本题考查基本初等函数及两数大小的比较, 考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

设函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) - \ln x$. 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$.

则 $f(x) \geq f(1) = 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立, 所以 $f(\frac{3}{4}) > 0$,

即 $\frac{1}{2} \times (\frac{9}{16} - 1) - \ln \frac{3}{4} > 0$, 即 $\ln \frac{4}{3} > \frac{7}{32}$. 因为 $d = 0.4^{2.1} < 0.4^2 = 0.16 < 0.2 < \frac{7}{32}$,

又 $c = \frac{1}{2} \ln \frac{15}{8} > \frac{1}{2} \ln \frac{16}{9} = \ln \frac{4}{3} = a$, 所以 $c > a > b > d$.

13. -56 【解析】本题考查二项式定理, 考查运算求解能力.

因为 $(x-y)^8$ 的展开式中 $x^5 y^3$ 的系数为 $C_8^3 \times (-1)^3 = -56$, 所以 $y^2(x-y)^8$ 的展开式中 $x^5 y^5$ 的系数为 -56.

14. 3 【解析】本题考查双曲线的性质与定义, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{m}{4}} x$, 所以 $\sqrt{\frac{m}{4}} = \sqrt{2}$, 解得 $m = 8$. 因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 4$, $|PF_1| = m - 1 = 7$, 所以 $|PF_2| = 3$.

15. 10 【解析】本题考查导数的几何意义, 考查运算求解能力.

因为 $y' = 3x^2$, 所以曲线 $y = x^3$ 在点 $A(-1, -1)$ 处的切线方程为 $y + 1 = 3(x + 1)$, 即 $y = 3x + 2$. 将 $y = 3x + 2$ 代入 $y = x^3$, 得 $x^3 - 3x - 2 = x^3 - 4x + x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2 = 0$,

解得 $x = 2$ 或 -1 , 故 $m = 2, n = 8, m + n = 10$.

16. $\frac{63}{16}; \frac{\sqrt{6}}{3}$ 【解析】本题考查三棱锥的侧面积与线面角, 考查直观想象与数学建模的核心素养.

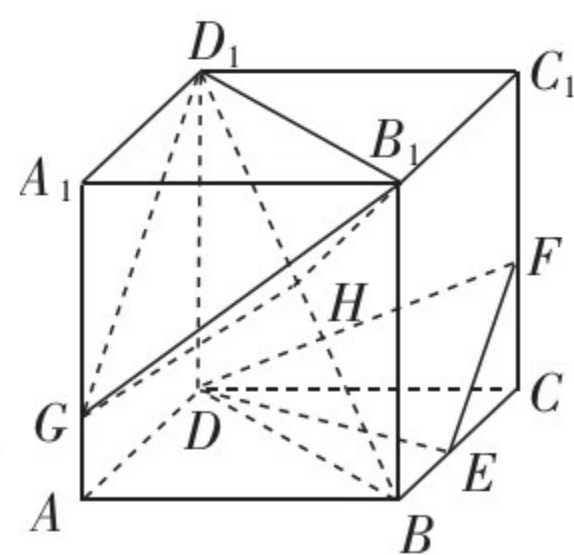
设 $CF = x$, 则 $BE = 2x$, 因为 $0 < CF < 3, 0 < BE < 3$, 所以 $0 < x < \frac{3}{2}$.

三棱锥 $C-DEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} x(3 - 2x) \times 3 = \frac{1}{4} \times 2x(3 - 2x) \leq \frac{1}{4} \times$

$(\frac{2x + 3 - 2x}{2})^2 = \frac{9}{16}$, 当且仅当 $x = \frac{3}{4}$ 时, 等号成立, 此时三棱锥 $C-DEF$ 的体积取得

最大值, 其侧面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times (\frac{3}{4} + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{63}{16}$. 因为 $EF \parallel$ 平面 $B_1 D_1 G$,

所以易证 $EF \parallel D_1 G$, 从而 $\triangle CEF$ 与 $\triangle A_1 D_1 G$ 相似, 因为 $\frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}$, 所以 G 为棱 AA_1 的中点, 取 BD_1 的中点 H , 连接 GH, HB_1 . 可证 $GH \perp$ 平面 $BDD_1 B_1$, 所以 $B_1 G$ 与平面 $BDD_1 B_1$ 所成的角为 $\angle GB_1 H$. 故



$$\tan \angle GB_1H = \frac{GH}{HB_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

17. 解:(1)因为 $a=4,absin Asin C=csin B$,所以 $4bsin Asin C=csin B$, 1 分
- 所以 $4bcsin A=bc$,则 $\sin A=\frac{1}{4}$ 3 分
- 因为 $a^2=b^2+c^2-2bccos A,bc=16$,所以 $16=b^2+c^2\pm32\times\frac{\sqrt{15}}{4}$, 4 分
- 则 $b^2+c^2=16\pm8\sqrt{15}$, 5 分
- 又 $b^2+c^2>0$,所以 $b^2+c^2=16+8\sqrt{15}$ 6 分
- (2)因为 $B=2A$,所以 $\sin B=\sin 2A$,且 A 为锐角, 7 分
- 所以 $\sin B=2\sin A\cos A$, 8 分
- 则 $b=2a\cos A=8\times\frac{\sqrt{15}}{4}=2\sqrt{15}$ 10 分

评分细则:

【1】第(1)问若由已知条件先直接得到 $4bcsin A=bc$,再得到 $\sin A=\frac{1}{4}$,不扣分;若最后得到 $b^2+c^2=16+8\sqrt{15}$,但过程中未体现 $\cos A=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$,要扣 1 分.

【2】若第(2)问最后的结果错误,但得到 $b=2a\cos A$,扣 1 分.

18. 解:(1)依题意得 X 的可能取值为 0,1,2,3, 1 分
- $P(X=0)=P(X=2)=\frac{3}{10}=0.3$, 2 分
- $P(X=1)=P(X=3)=\frac{2}{10}=0.2$, 3 分
- 故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.3	0.2	0.3	0.2

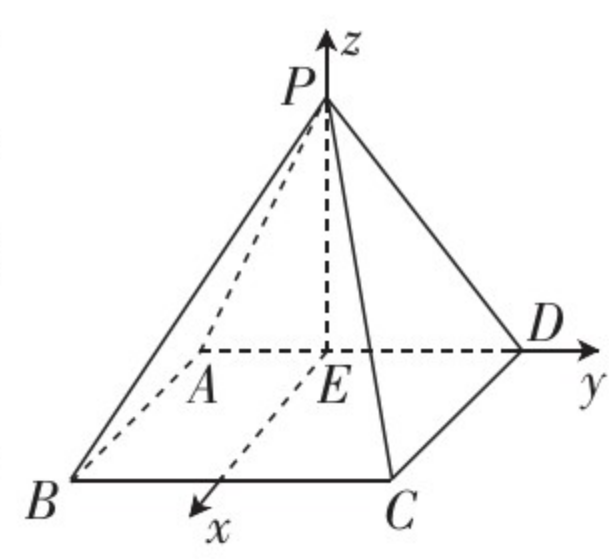
- 4 分
- (2) $\bar{x}_甲=\frac{1}{10}(0+1+0+2+2+3+3+1+2+0)=1.4$, 5 分
- $\bar{x}_乙=\frac{1}{10}(2+4+1+1+0+2+1+1+0+1)=1.3$, 6 分
- $s_甲^2=\frac{1}{10}[3\times(0-1.4)^2+2\times(1-1.4)^2+3\times(2-1.4)^2+2\times(3-1.4)^2]=1.24$, 7 分
- $s_乙^2=\frac{1}{10}[2\times(0-1.3)^2+5\times(1-1.3)^2+2\times(2-1.3)^2+(4-1.3)^2]=1.21$ 8 分
- 因为 $\bar{x}_甲=\bar{x}_丙>\bar{x}_乙,s_丙^2>s_甲^2>s_乙^2$, 9 分
- 所以次品数的平均数最小的是乙,稳定性最好的也是乙,稳定性最差的是丙, 10 分
- 故应淘汰丙机床,乙机床的性能最好. 12 分
- 评分细则:

【1】若 X 的分布列正确,但未求每个 X 对应的概率,不扣分.

【2】若未写“次品数的平均数最小的是乙,稳定性最好的也是乙,稳定性最差的是丙”,而直接得出结论“应淘汰丙机床,乙机床的性能最好”,要扣 1 分.

19. (1)证明:因为 $PE\perp$ 底面 $ABCD$,所以 $PE\perp AB$ 1 分
- 在矩形 $ABCD$ 中, $AB\perp AD$, 2 分

因为 $AD \cap PE = E$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAD , 3 分
 因为 $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp PD$ 4 分
 (2) 解: 以 E 为坐标原点, $\overrightarrow{ED}$ 的方向为 y 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$, 则 $P(0, 0, 3), B(3, -2, 0), C(3, 3, 0), D(0, 3, 0)$,
 $\overrightarrow{BC} = (0, 5, 0), \overrightarrow{CD} = (-3, 0, 0), \overrightarrow{PC} = (3, 3, -3)$ 6 分
 设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,



则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 即 $\begin{cases} 3x + 3y - 3z = 0, \\ -3x = 0, \end{cases}$ 7 分

令 $y = 1$, 得 $\mathbf{n} = (0, 1, 1)$ 8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x', y', z')$,

则 $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 即 $\begin{cases} 3x' + 3y' - 3z' = 0, \\ 5y' = 0, \end{cases}$ 9 分

令 $x' = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 0, 1)$ 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 11 分

由图可知, 二面角 $B-PC-D$ 为钝角, 所以二面角 $B-PC-D$ 为 $\frac{2\pi}{3}$ (或 120°). 12 分

评分细则:

【1】第(1)问未写 $PD \subset$ 平面 PAD , 不扣分.

【2】第(2)问解析中得到平面的一个法向量不唯一, 只要与参考答案中求得的法向量共线即可得分.

20. 解: (1) 因为 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, $a_1 = 4$, 所以 $a_n = n + 3$ 2 分

又 $\{a_n + b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, $a_1 + b_1 = 2$, 所以 $a_n + b_n = 2^n$, 4 分

故 $b_n = 2^n - a_n = 2^n - n - 3$ 5 分

(2) 因为 $b_{n+1} - b_n = 2^n - 1 > 0$, 所以 $\{b_n\}$ 为递增数列, 6 分

又 $b_1 = -2, b_2 = -1, b_3 = 2$, 故当 $n \geq 3$ 时, 恒有 $b_n > 0$,

故 $|b_n| = \begin{cases} n + 3 - 2^n, & n < 3, \\ 2^n - n - 3, & n \geq 3. \end{cases}$ 7 分

记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

则 $S_n = (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) - (4 + 5 + \dots + n + 3) = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - \frac{n(n+7)}{2} = 2^{n+1} - \frac{n^2 + 7n + 4}{2}$ 9 分

当 $n < 3$ 时, $T_n = -S_n = -2^{n+1} + \frac{n^2 + 7n + 4}{2}$, 10 分

当 $n \geq 3$ 时, $T_n = -b_1 - b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n = -S_2 + S_n - S_2 = S_n - 2S_2 = 2^{n+1} - \frac{n^2 + 7n - 8}{2}$ 11 分

综上, $T_n = \begin{cases} -2^{n+1} + \frac{n^2 + 7n + 4}{2}, & n < 3, \\ 2^{n+1} - \frac{n^2 + 7n - 8}{2}, & n \geq 3. \end{cases}$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问未得到 $a_n + b_n = 2^n$, 但写了 $a_1 + b_1 = 2$, 给 1 分.

【2】第(2)问得到 $T_n = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 2^{n+1} - \frac{n^2 + 7n - 8}{2}, & n \geq 3, \end{cases}$ 不扣分.

21. 解: (1) 选①, 因为 $a = 3$, 所以 $f(x) = (x - 6) \ln x + 3$, 则 $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{6}{x}$ 1 分

记 $h(x)=\ln x+1-\frac{6}{x}$, 则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}>0$, 且 $h(2)<0, h(3)>0$, 2 分

因此方程 $f'(x)=0$ 有唯一解, 不妨设 $f'(x_0)=0, 2<x_0<3$.

当 $x\in(0, x_0)$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x\in(x_0, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$ 3 分

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)<f(3)=3(1-\ln 3)<0$ 4 分

又因为 $f(1)=f(6)=3>0$, 5 分

所以 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 和 $(x_0, 6)$ 内各有一个零点, 故 $f(x)$ 零点的个数为 2. 6 分

选②, 因为 $a=-1$, 所以 $f(x)=(x+2)\ln x-1$, 则 $f'(x)=\ln x+1+\frac{2}{x}$ 1 分

记 $h(x)=\ln x+1+\frac{2}{x}$, 则 $h'(x)=\frac{x-2}{x^2}$. 当 $x\in(0, 2)$ 时, $h'(x)<0$; 当 $x\in(2, +\infty)$ 时, $h'(x)>0$ 2 分

因此 $h(x)_{\min}=h(2)=\ln 2+2>0$, 3 分

所以 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

又因为 $f(1)=-1<0, f(e)=e+1>0$, 5 分

所以 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 内存在唯一零点, 故 $f(x)$ 零点的个数为 1. 6 分

(2) 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

设函数 $g(x)=xf(x)=(x^2-2ax)\ln x+ax, x>0$,

则 $g'(x)=(2x-2a)\ln x+x-a=(x-a)(2\ln x+1)$ 7 分

令 $g'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{\sqrt{e}}{e}, x_2=a$.

当 $0<a<\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时, 由 $g'(x)>0$, 得 $x\in(0, a)\cup(\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty)$; 由 $g'(x)<0$, 得 $x\in(a, \frac{\sqrt{e}}{e})$. 故 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 和 $(\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, \frac{\sqrt{e}}{e})$ 上单调递减. 9 分

当 $a=\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时, $g'(x)\geq 0$ 恒成立, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 10 分

当 $a>\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时, 由 $g'(x)>0$, 得 $x\in(0, \frac{\sqrt{e}}{e})\cup(a, +\infty)$; 由 $g'(x)<0$, 得 $x\in(\frac{\sqrt{e}}{e}, a)$. 故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{e}}{e})$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{\sqrt{e}}{e}, a)$ 上单调递减. 12 分

评分细则:

【1】第(1)问若用极限说明 $f(x)$ 两边函数值的正负, 而未用具体函数值的正负来说明, 扣 1 分.

【2】选①时, 除了选用 $f(1)=f(6)=3>0$, 还可以使用其他函数值来说明, 一个自变量在 $(0, 2)$ 内, 另一个自变量在 $[4, +\infty)$ 内即可.

【3】选②时, 解析中, $f(1)=-1<0, f(e)=e+1>0$, 这里的选值也不是唯一的, 只要说明一个函数值小于 0, 另一个函数值大于 0, 即可得分.

【4】第(2)问未写令 $g'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{\sqrt{e}}{e}, x_2=a$, 其余步骤都正确, 不扣分.

【5】第(1)问还可以这样做: 选①, 由 $f(x)=0$ 得 $\ln x=\frac{3}{6-x}$, 结合 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{3}{6-x}$ 的图象及 $\ln 3>1$, 可得 $f(x)$ 有 2 个零点; 选②, 由 $f(x)=0$ 得 $\ln x=\frac{1}{x+2}$, 同理可得 $f(x)$ 有 1 个零点.

22. (1) 解: 依题意可设 E 的方程为 $y^2=2px(p\neq 0)$, 1 分

联立 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=x+1, \end{cases}$ 得 $x^2+2(1-p)x+1=0$, 2 分

依题意得 $\Delta=4(1-p)^2-4=0$, 3 分

解得 $p=2$ 或 $p=0$ (舍去),故 E 的方程为 $y^2=4x$ 4 分

(2)①证明:设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(-1,m)$.

设过点 P 且与 E 相切的直线 l 的斜率为 k ,则 $l:y-m=k(x+1)$,

联立 $\begin{cases} y=kx+m+k, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4(m+k)=0$, 5 分

则 $\Delta_1=16-16(m+k)k=0$,

即 $k^2+mk-1=0$ 6 分

由题意知,直线 PA,PB 的斜率 k_1,k_2 为方程 $k^2+mk-1=0$ 的两根,

则 $k_1k_2=-1$,故 $PA\perp PB$ 7 分

②解:不妨设 PA 的斜率 $k_1>0$,则 PB 的斜率 $k_2<0$,

设 PA,PB 的倾斜角分别为 θ_1,θ_2 ,直线 AB 的倾斜角为 θ_0 且斜率为 k_0 ,

$k_0=\tan\theta_0=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{1}{4}y_2^2-\frac{1}{4}y_1^2}=\frac{4}{y_2+y_1}$, 8 分

由①可知 $2y_1=\frac{4}{k_1}$,即 $y_1=\frac{2}{k_1}$,同理可得 $y_2=\frac{2}{k_2}$,

则 $k_0=\frac{2k_2k_1}{k_2+k_1}=\frac{-2}{-m}=\frac{2}{m}$ 9 分

因为 $\tan\angle PCD=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta_1)=\frac{1}{k_1}$,

$\tan\angle PBA=\tan(\theta_2-\theta_0)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_0}{1+\tan\theta_2\cdot\tan\theta_0}=\frac{k_2-\frac{2}{m}}{1+k_2\cdot\frac{2}{m}}=\frac{mk_2-2}{m+2k_2}$, 10 分

所以 $\tan\angle PBA-\tan\angle PCD=\frac{mk_2-2}{m+2k_2}-\frac{1}{k_1}=\frac{m(-1+k_1k_2)-2(k_1+k_2)}{k_1(m+2k_2)}=\frac{-2m+2m}{k_1(m+2k_2)}=0$,

则 $\tan\angle PCD=\tan\angle PBA$,从而 $\angle PCD=\angle PBA$, 11 分

又 $PA\perp PB$,则 $\text{Rt}\triangle PCD\sim\text{Rt}\triangle PBA$,所以 $\frac{PC}{CD}=\frac{PB}{BA}$,故 $\frac{|PC|}{|PB|}\cdot\frac{|AB|}{|CD|}=1$ 为定值. 12 分

评分细则:

【1】第(1)问解析第一行写为“设 E 的方程为 $y^2=2px(p>0)$ ”,不扣分.

【2】第(2)问若只是得到结论 $\frac{|PC|}{|PB|}\cdot\frac{|AB|}{|CD|}$ 为定值,而没有过程,给 1 分.

