



高三数学考试

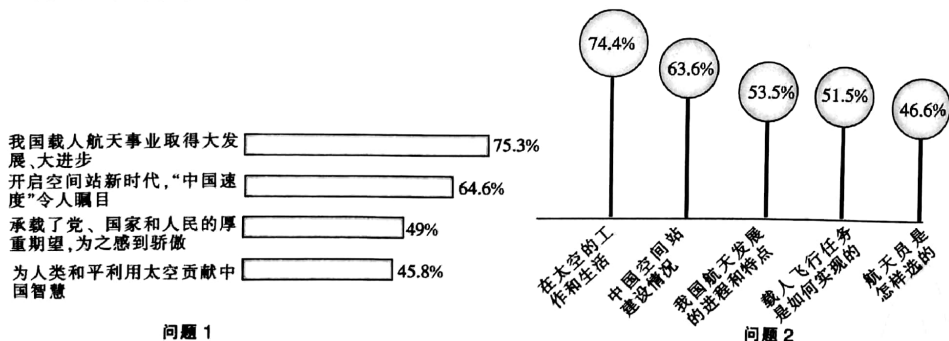
(考试时间:120 分钟 试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{5\}$ B. $\{4, 5\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$
2. 下列四个向量中,与向量 $a = (-2, 3)$ 共线的是
A. $(3, 2)$ B. $(3, -2)$ C. $(4, -6)$ D. $(4, 6)$
3. 2021 年 7 月,中国青年报社社会调查中心通过问卷网,对 2047 名 14~35 岁青少年进行的专项调查显示,对于神舟十二号航天员乘组出征太空,98.9% 的受访青少年都表示关注。针对两个问题“关于此次神舟十二号飞行乘组出征太空,你有什么感受(问题 1)”和“青少年最关注哪些方面(问题 2)”,问卷网统计了这 2047 名青少年回答的情况,得到如图所示的两个统计图,据此可得到的正确结论为



- A. 对于神舟十二号太空之旅,只有极少的受访青少年关注航天员是怎样选拔的
- B. 对于神舟十二号飞行乘组出征太空,超过七成的受访青少年认为开启空间站新时代,“中国速度”令人瞩目
- C. 对于神舟十二号太空之旅,青少年关注最多的是航天员在太空的工作和生活
- D. 对于神舟十二号飞行乘组出征太空,超过八成的受访青少年充分感受到我国载人航天事业取得大发展、大进步

4. 若虚数 z 满足 $2i\bar{z}=z^2$, 则 $|z| =$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 4

D. 0 或 2

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $g(x) = x^2 - 2x$, 则

A. $f(x+1)$ 为奇函数, $g(x-1)$ 为偶函数

B. $f(x+1)$ 为奇函数, $g(x+1)$ 为偶函数

C. $f(x+\frac{1}{2})$ 为奇函数, $g(x-1)$ 为偶函数

D. $f(x+\frac{1}{2})$ 为奇函数, $g(x+1)$ 为偶函数

6. 若 $\tan(\alpha+2\beta)=3$, $\tan(\alpha-\beta)=2$, 则 $\tan(\alpha+5\beta)=$

A. $\frac{11}{5}$

B. $\frac{11}{2}$

C. $\frac{2}{11}$

D. $\frac{5}{11}$

7. 含有海藻碘浓缩液的海藻碘盐, 是新一代的碘盐产品. 海藻中的碘 80% 为无机碘, 10% ~ 20% 为有机碘, 海藻碘盐兼备无机碘和有机碘的优点. 某超市销售的袋装海藻碘食用盐的质量 X (单位: 克) 服从正态分布 $N(400, 4)$, 某顾客购买了 4 袋海藻碘食用盐, 则至少有 2 袋的质量超过 400 克的概率为

A. $\frac{11}{16}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{5}{16}$

8. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P, Q 是 C 上位于 x 轴上方的任意两点, 且 $PF_1 \parallel QF_2$. 若 $|PF_1| + |QF_2| \geq b$, 则 C 的离心率的取值范围是

A. $(0, \frac{1}{2}]$

B. $[\frac{1}{2}, 1)$

C. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

D. $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若直线 $3x+4y+n=0 (n \in \mathbb{N}^*)$ 与圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = a_n^2 (a_n > 0)$ 相切, 则

A. $a_1 = \frac{6}{5}$

B. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

C. 圆 C 可能经过坐标原点

D. 数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 23

10. “端午节”为中国国家法定节假日之一, 已列入世界非物质文化遗产名录, 吃粽子便是端午节食俗之一. 全国各地的粽子包法各有不同. 如图, 粽子可包成棱长为 6 cm 的正四面体状的三角粽, 也可做成底面半径为 $\frac{3}{2}$ cm, 高为 6 cm (不含外壳) 的圆柱状竹筒粽. 现有两碗馅料,

若一个碗的容积等于半径为 6 cm 的半球的体积, 则 (参考数据: $\sqrt{2}\pi \approx 4.44$)



A. 这两碗馅料最多可包三角粽 35 个

B. 这两碗馅料最多可包三角粽 36 个

C. 这两碗馅料最多可包竹筒粽 21 个

D. 这两碗馅料最多可包竹筒粽 20 个

11. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在一个周期内的图象经过 $A(-\frac{5\pi}{18}, 0)$, $B(-\frac{\pi}{9}, -1)$, $C(\frac{\pi}{9}, 0)$, $D(\frac{2\pi}{9}, 1)$ 这四个点中的三个点, 则

A. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ B. $\varphi = -\frac{\pi}{9}$ C. $\omega = 2$ D. $\omega = 3$

12. 设 $a = \ln \frac{4}{3}$, $b = \frac{7}{32}$, $c = \frac{1}{2} \ln \frac{15}{8}$, $d = 0.4^{2.1}$, 则

A. $c > a$ B. $b > c$ C. $a > b$ D. $a > d$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. $y^2(x-y)^8$ 的展开式中 x^5y^5 的系数为 ▲.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ ($m > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$, F_1, F_2 分别是 C 的左、右焦点, P 为 C 右支上一点. 若 $|PF_1| = m - 1$, 则 $|PF_2| =$ ▲.

15. 曲线 $y = x^3$ 在点 $A(-1, -1)$ 处的切线与曲线 $y = x^3$ 的另一个公共点为 $B(m, n)$, 则 $m + n =$ ▲.

16. 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 BC, CC_1, AA_1 上一点, $BE = 2CF$, 且 $EF \parallel$ 平面 B_1D_1G . 当三棱锥 $C-DEF$ 的体积取得最大值时, 三棱锥 $C-DEF$ 的侧面积为 ▲, B_1G 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为 ▲. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边. 已知 $a = 4, a \sin A \sin C = c \sin B$.

(1) 若 $bc = 16$, 求 $b^2 + c^2$;

(2) 若 $B = 2A$, 求 b .

18. (12 分)

甲、乙、丙三台机床同时生产一种零件, 在 10 天中, 甲、乙机床每天生产的次品数如下表所示:

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天	第 9 天	第 10 天
甲	0	1	0	2	2	3	3	1	2	0
乙	2	4	1	1	0	2	1	1	0	1

(1) 若从这 10 天中随机选取 1 天, 设甲机床这天生产的次品数为 X , 求 X 的分布列;

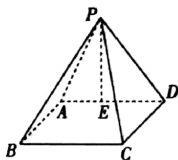
(2) 已知丙机床这 10 天生产次品数的平均数为 1.4, 方差为 1.84. 以平均数和方差为依据, 若要从这三台机床中淘汰一台, 你应该怎么选择? 这三台机床你认为哪台性能最好?

19. (12 分)

如图,在底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, E 为棱 AD 上一点, $PE \perp$ 底面 $ABCD$.

(1)证明: $AB \perp PD$.

(2)若 $AE=2, AB=DE=PE=3$,求二面角 $B-PC-D$ 的大小.



20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = -2b_1 = 4$, 且 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, $\{a_n + b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列.

(1)求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x-2a)\ln x + a$.

(1)从① $a=3$, ② $a=-1$ 这两个条件中选择一个,求 $f(x)$ 零点的个数;

(2)若 $a > 0$, 讨论函数 $y = xf(x)$ 的单调性.

注:若第(1)问选择两个条件分别解答,则按第一个解答计分.

22. (12 分)

已知抛物线 E 的顶点为坐标原点,对称轴为 x 轴,且直线 $y=x+1$ 与 E 相切.

(1)求 E 的方程.

(2)设 P 为 E 的准线上一点,过 P 作 E 的两条切线,切点为 A, B , 直线 AB 的斜率存在,且直线 PA, PB 与 y 轴分别交于 C, D 两点.

①证明: $PA \perp PB$.

②试问 $\frac{|PC|}{|PB|} \cdot \frac{|AB|}{|CD|}$ 是否为定值? 若是,求出该定值;若不是,请说明理由.