绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型:B

2022届广东省广州市七校联合体高三调研考试（一）

数　学

2021.6

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、试室号和座位号填写在答题卡上。

2．用 2B 铅笔将考生号及试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若复数 $z=m+1+(m-1)i$ 是纯虚数（i 是虚数单位），则实数 $m=$

A．1　　　B．-1　　　C．±1　　　D．0

2.已知 $\overrightarrow{a}=(3,-1,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,4,x)$，且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，则 $x=$

A．5　　　B．4　　　C．3　　　D．2

3.$\{a_n\}$是等比数列，首项 $a_1=1$，前3项和 $S_3=3$，则公比 $q=$

A．1　　　B．-2　　　C．1或-2　　　D．3

4.某地为了解参加培训教师的年龄结构，随机调查了100名教师的年龄，得到如图1所示的频率分布直方图，则年龄在$[30,40)$的频率为

A．0.06　　B．0.07　　C．0.13　　D．0.65

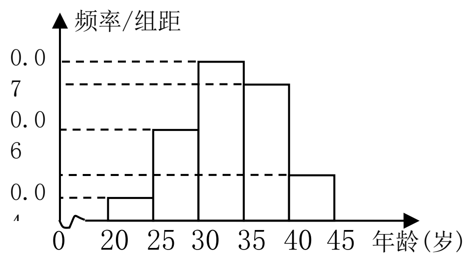


图1

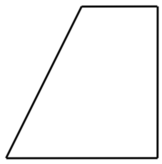
5.在 ΔABC 中，已知向量 $\overrightarrow{AB}=(\cos18^0,\cos72^0)$，$\overrightarrow{AC}=(2\cos63^0,2\cos27^0)$，则 $\angle BAC=$

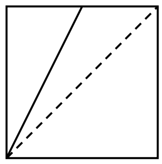
A．45^0　　　B．135^0　　　C．81^0　　　D．99^0

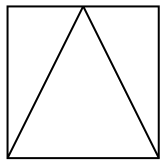
6.空间中有 A、B、C、D、E、F 共6个点，其中任何4个点都不在同一平面上，则以其中4个点为顶点的三棱锥共有

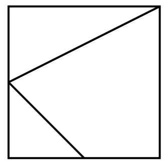
A．30个　　　B．24个　　　C．20个　　　D．15个

7. M 、N 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1B_1、A_1D_1 的中点，如图2是用过 M 、N 、A 和 D 、N 、C_1 的平面截去两个角后所得几何体，该几何体的主视图是


A.


B.


C.


D.

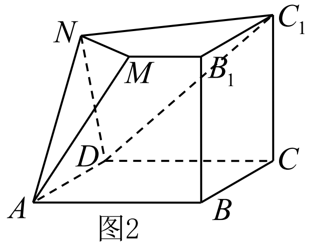


图2

8.已知 $f(x)$ 、$g(x)$ 都是定义在 R 上的函数，$g(x)\neq 0$ ，$f(x)g^{/}(x)>f^{/}(x)g(x)$ ，$f(x)=a^{x}g(x)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），且 $\dfrac{f(1)}{g(1)}+\dfrac{f(-1)}{g(-1)}=\dfrac{5}{2}$，对于有穷数列 $\dfrac{f(n)}{g(n)}$（$n=1$，2，…，10），任取正整数 k（$1\leq k\leq 10$），它的前 k 项和大于 $\dfrac{15}{16}$ 的概率是

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

二、多选题：本大题共4小题，每小题满分5分，部分选对得2分，多选或错选不得分，满分20分

9．由函数 $f\left(x\right)=sinx$ 的图象得到函数 $g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 的图象的过程中，下列表述正确的是（　　）

A．先将 $f\left(x\right)=sinx$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），再向左平移个 $\dfrac{\pi}{12}$ 单位长度

B．先将 $f\left(x\right)=sinx$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），再向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

C．先将 $f\left(x\right)=sinx$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将图象上各点的横坐标缩短到

原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）

D．先将$f\left(x\right)=sinx$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，再将图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）

10．数学家华罗庚曾说："数缺形时少直观，形少数时难人微．"事实上，很多代数问题可以转化为几何问题加以解决，例如，与$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$相关的代数问题，可以转化为点$A(x,y)$与点$B(a,b)$之间的距离的几何问题．结合上述观点，可得方程$\left|\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-4x+5}\right|=2$的解为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C．$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{6}$

11．已知$(1-x^2)\left(x+2\right)^4=a_0+a_1\left(x+1\right)+a_2\left(x+1\right)^2+a_3\left(x+1\right)^3+a_4\left(x+1\right)^4+a_5\left(x+1\right)^5+a_6\left(x+1\right)^6$，则（　　）

A．$a_0=0$　　B．$a_3=20$　　C．$a_1+a_5=0$　　D．$|a_0+a_2+a_4+a_6|=|a_1+a_3+a_5|$

12．已知$f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，且$f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right)$，当$0\le x\le 1$时，$f\left(x\right)=x$，关于函数$g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|+f\left(|x|\right)$，下列说法正确的是（　　）

A．$g\left(x\right)$为偶函数　　B．$g\left(x\right)$在（1，2）上单调递增

C．$g\left(x\right)$在[2016，2020]上恰有三个零点　　D．$g\left(x\right)$的最大值为2

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分．

13. 已知命题 p ： $\exists x_0 \in R$ ， $x_0{}^2 + 1 < 0$ ，则命题 p 的否定为 $\neg p$ ： __________．

14. $(2x^3 - \frac{1}{2x^3})^{10}$ 的展开式中，常数项是__________．

15. 若双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上的点 P 到点 $(5，0)$ 的距离为 6 ，则 P 到点 $(-5，0)$ 的距离为__________．

16. 一物体沿直线以 $v = t^2 + 3$ （ t 的单位： s ， v 的单位： m/s ）的速度运动，则该物体在 1 ～ $4\ s$ 间行进的路程是__________．

四、解答题：本大题共6小题，满分70分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

17. （**本小题满分10分**）

ΔABC 的三个内角 A 、 B 、 C 对应的三条边长分别是 a 、 b 、 c ，且满足 $c\sin A = \sqrt{3}a\cos C$ ．

⑴求角 C 的大小；

⑵若 $b = 2$ ， $c = \sqrt{7}$ ，求 a ．

18. （**本小题满分12分**）

某电视台在一次对收看文艺节目和新闻节目观众的抽样调查中，随机抽取了100名电视观众，得到如下列联表：

	文艺节目	新闻节目	总计
20至40岁	40	16	56
大于40岁	20	24	44
总计	60	40	100

⑴用分层抽样方法在收看新闻节目的观众中随机抽取5名，大于40岁的观众应抽取几名？

⑵是否有99%的把握认为收看文艺节目的观众与年龄有关？说明你的理由；

⑶已知在大于40岁收看文艺节目的20名观众中，恰有8名又收看地方戏节目．现在从这20名观众中随机选出3名进行其他方面调查，记选出收看地方戏节目的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列与数学期望．

参考公式与临界值表： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$

$P(K^2 \ge k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19．（**本小题满分12分**）

如图4，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是四棱柱，$AA_1\perp$底面$ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AD=CD=AA_1=1$，$AB=2$．

⑴求证：$A_1C_1\perp$平面BCC_1B_1；

⑵求平面A_1BD与平面BCC_1B_1所成二面角的大小．

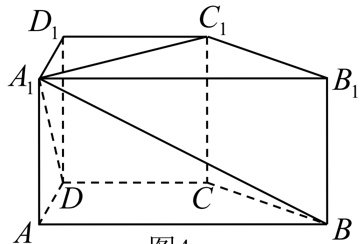


图4

20．（**本小题满分12分**）

已知$\{a_n\}$是递增的等差数列，它的前三项的和为-3，前三项的积为8．

⑴求数列$\{a_n\}$的通项公式；

⑵求数列$\{|a_n|\}$的前n项和S_n．

21．（**本小题满分12分**）

在平面直角坐标系xOy中，抛物线C：$y^2=8x$的焦点为F。椭圆Σ的中心在坐标原点，离心率$e=\frac{1}{2}$，并以F为一个焦点．

⑴求椭圆Σ的标准方程；

⑵设A_1A_2是椭圆Σ的长轴（A_1在A_2的左侧），P是抛物线C在第一象限的一点，过P作抛物线C的切线，若切线经过A_1，求证：$\tan\angle A_1PA_2=\sqrt{2}$．

22．（**本小题满分12分**）

已知函数$f(x)=m\ln(x-1)+(m-1)x$，$m\in R$是常数．

⑴若$m=\frac{1}{2}$，求函数$f(x)$的单调区间；

⑵若函数$f(x)$存在最大值，求m的取值范围；

⑶若对函数$f(x)$定义域内任意x_1、x_2（$x_1\neq x_2$），$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$恒成立，求$m$的取值范围．

2022届广东省广州市七校联合体高三调研考试（一）

数学评分参考2021.6

一、单选题　BACD　ADBC

二、多选题　AC　AC　ACD　AD

三、填空题　13. $\forall x \in R$（2分），$x^2+1 \geq 0$（3分）　　14. -252

15. 14　　16. $30m$（数值4分，单位1分）

四、解答题

17.⑴由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$……2分，得$c\sin A=a\sin C$……3分，由已知得

$a\sin C=\sqrt{3}a\cos C$，$\tan C=\sqrt{3}$……4分，因为$0<C<\pi$，所以$C=\dfrac{\pi}{3}$……5分

⑵由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$……7分，得$(\sqrt{7})^2=a^2+2^2-4a\times\cos\dfrac{\pi}{3}$……9分，即$a^2-2a-3=0$……10分，解得$a=3$或$a=-1$……11分，负值舍去，所以$a=3$……10分

18.⑴应抽取大于40岁的观众人数为$\dfrac{24}{40}\times 5=3$（名）……3分（列式2分，计算1分）

⑵根据列联表中的数据，得

$$K^2=\frac{100\times(40\times 24-16\times 20)^2}{56\times 44\times 60\times 40}=\frac{1600}{231}\approx 6.926>6.635$$

……7分（列式2分，计算1分，判断1分）

所以，有99%的把握认为收看文艺节目的观众与年龄有关……8分

⑶ξ的可能值为0、1、2、3……9分

$P(\xi=0)=\dfrac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\dfrac{11}{57}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_8^1C_{12}^2}{C_{20}^3}=\dfrac{44}{95}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_8^2C_{12}^1}{C_{20}^3}=\dfrac{28}{95}$，

$P(\xi=3)=\dfrac{C_8^3}{C_{20}^3}=\dfrac{14}{285}$

ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{11}{57}$	$\dfrac{44}{95}$	$\dfrac{28}{95}$	$\dfrac{14}{285}$

……10分

ξ的数学期望$E\xi=0\times\dfrac{11}{57}+1\times\dfrac{44}{95}+2\times\dfrac{28}{95}+3\times\dfrac{14}{285}=\dfrac{6}{5}$……12分（每个等号1

分）

19.(1) $AA_1\perp$底面$ABCD$，所以$CC_1\perp A_1C_1$……1分，

取A_1B_1的中点E，连接EC_1……2分，则$A_1EC_1D_1$是正方形，$\angle A_1C_1E=\frac{\pi}{4}$……3分，又$B_1E=C_1E=1$，$\angle B_1C_1E=\frac{\pi}{4}$，所以$\angle A_1C_1B_1=\frac{\pi}{2}$，$A_1C_1\perp B_1C_1$……4分，因为$CC_1\cap B_1C_1=C_1$，所以$A_1C_1\perp$平面$BCC_1B_1$……5分.

(2)（法一）以D为原点，DA、DC、DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系……6分，则$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$……7分，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$……8分，由(1)知，平面$BCC_1B_1$的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$……9分，设平面$A_1BD$的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}a+2b=0\\ a+c=0\end{cases}$，不妨设$b=1$，则$a=-2$，$c=2$，从而$\overrightarrow{n_2}=(-2,1,2)$，设所求二面角的大小为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$，$=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所求二面角的大小为$\frac{\pi}{4}$……12分.

（法二）取AB的中点F，连接D_1E、EF、DF……6分，则$EF\,//\,BB_1$、$DF\,//\,BC$，因为$DF\cap EF=F$，所以平面$DD_1EF\,//$与平面BCC_1B_1……7分，所以平面A_1BD与平面BCC_1B_1所成二面角等于平面A_1BD与平面DD_1EF所成二面角……8分。设$EF\cap A_1B=G$，$D_1E\cap A_1C_1=H$，连接DG，作$A_1M\perp DG$，垂足为M，连接HM，由(1)知$A_1C_1\perp$平面DD_1EF，$A_1C_1\perp DG$，$A_1M\cap A_1H=A_1$，所以$DG\perp$平面A_1HM……9分，$DG\perp HM$，$\angle A_1MH$是平面A_1BD与平面BCC_1B_1所成二面角……10分。设$DM=x$，则

$A_1D^2-x^2=A_1G^2-GM^2=A_1M^2$……11分，其中$A_1D=\sqrt{2}$，$A_1G=\frac{1}{2}A_1B=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$DG=\sqrt{DF^2+FG^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{2}$，$GM=\frac{3}{2}-x$，代入解得$x=1$，在$\Delta A_1MH$中，$A_1H\perp MH$，$A_1M=\sqrt{A_1D^2-DM^2}=1$，$A_1H=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$\sin\angle A_1MH=\frac{A_1H}{A_1M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所求二面角的大小为$\frac{\pi}{4}$……12分.

20.⑴设$\{a_n\}$的公差为d（$d>0$），依题意，$\begin{cases} a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=-3 \\ a_1\cdot(a_1+d)\cdot(a_1+2d)=8 \end{cases}$……2分，即$\begin{cases} a_1+d=-1 \\ a_1\cdot(a_1+2d)=-8 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=-4 \\ d=3 \end{cases}$或$\begin{cases} a_1=2 \\ d=-3 \end{cases}$……4分，因为$d>0$，

所以$\begin{cases} a_1=-4 \\ d=3 \end{cases}$，$\{a_n\}$的通项$a_n=-7+3n$……5分

⑵由⑴得$a_1=-4$，$|a_1|=4$；$a_2=-1$，$|a_2|=1$……6分；当$n\ge 3$时，$a_n>0$，$|a_n|=a_n$……7分，所以$S_1=4$，$S_2=5$……8分

当$n\ge 3$时，$S_n=S_2+(a_3+\cdots a_n)=5+[2+\cdots+(-7+3n)]$……9分，

$=5+\dfrac{2+(-7+3n)}{2}\times(n-2)=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{11}{2}n+10$……11分，

综上所述，$S_n=\begin{cases} 4, & n=1, \\ 5, & n=2, \\ \dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{11}{2}n+10, & n\ge 3. \end{cases}$……12分.

21.⑴依题意，设椭圆Σ的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）……1分，

$2p=8$，所以$p=4$，$\dfrac{p}{2}=2$……2分，$F(2,0)$，$c=2$……3分，

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以$a=4$……4分，$b^2=a^2-c^2=12$……4分，

所以椭圆Σ的标准方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$……5分

⑵抛物线C在第一象限的部分可看作函数$y=\sqrt{8x}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$的图象……6分，依题意，不妨设$P(\dfrac{{y_0}^2}{8},y_0)$（$y_0>0$），因为$y'=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{2}{x}}$……7分，所以切线$PA_1$的斜率$k_{PA_1}=y'|_{x=x_0}=\dfrac{4}{y_0}$……9分，$PA_1$：$y-y_0=\dfrac{4}{y_0}(x-\dfrac{{y_0}^2}{8})$……8分，由⑴得$A_1(-4,0)$，代入解得$y_0=4\sqrt{2}$……9分，则$P(4,4\sqrt{2})$，$A_2(4,0)$……10分，$PA_2\perp A_1A_2$，在$Rt\Delta PA_1A_2$中，$A_1A_2=8$，$PA_2=4\sqrt{2}$，$\angle PA_2A_1$是直角，所以$\tan\angle A_1PA_2=\dfrac{A_1A_2}{PA_2}=\sqrt{2}$……12分.

22．⑴$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$……1分

$m=\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)-\dfrac{1}{2}x$，$f'(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-x}{2(x-1)}$……2分

解 $f^{/}(x)=0$ 得 $x=2$ 。当 $x\in(1,\ 2)$ 时， $f^{/}(x)>0$ ，即 $f(x)$ 在 $(1,\ 2)$ 单调递增……3分；当 $x\in(2,\ +\infty)$ 时， $f^{/}(x)<0$ ，即 $f(x)$ 在 $(2,\ +\infty)$ 单调递减……4分。

⑵ $f^{/}(x)=\dfrac{m}{x-1}+(m-1)=\dfrac{(m-1)x+1}{x-1}$

若 $m\geq 1$，则 $f^{/}(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，不存在最大值……5分

若 $m\leq 0$，则 $f^{/}(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，不存在最大值……6分

若 $0<m<1$，由 $f^{/}(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{1-m}$，当 $x\in(1,\ \dfrac{1}{1-m})$ 时，$f^{/}(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(\dfrac{1}{1-m},\ +\infty)$ 时，$f^{/}(x)<0$，$f(x)$ 单调递减……8分，所以 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{1-m}$ 取得最大值，所求 m 的取值范围为 $(0,\ 1)$ ……9分

⑶由 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$ 得 $\dfrac{m\ln(x_1-1)+m\ln(x_2-1)}{2}>m\ln(\dfrac{x_1+x_2}{2}-1)$ ……10分，依题意 $x_1-1>0$， $x_2-1>0$ 且 $x_1-1\neq x_2-1$，所以

$\dfrac{x_1+x_2}{2}-1=\dfrac{(x_1-1)+(x_2-1)}{2}>\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}$ ……10分，

$y=\ln x$ 是增函数，所以 $\ln(\dfrac{x_1+x_2}{2}-1)>\ln\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}$ ……11分，

$=\dfrac{1}{2}\ln[(x_1-1)(x_2-1)]=\dfrac{1}{2}[\ln(x_1-1)+\ln(x_2-1)]$，所求 m 的取值范围为

$(-\infty,\ 0)$ ……12分.