2022届广东省广州市中学教学研究会高三调研考试

数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、试室号和座位号填写在答题卡上。

2．用 2B 铅笔将考生号及试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．i 为虚数单位，$(-1+2i)\cdot i=$

A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$-2-i$　　D．$-2+i$

2.已知向量$\vec{a}=(2,3)$与$\vec{b}=(x,-6)$共线，则$x=$

A．-4　　B．4　　C．9　　D．-9

3.一个数列，它的前4项分别是$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{16}$，这个数列的一个通项公式是

A．$a_n=\frac{2n-1}{2n}$　　B．$a_n=\frac{2n-1}{2^n}$　　C．$a_n=\frac{2n+1}{2n}$　　D．$a_n=\frac{2n+1}{2^n}$

4.已知$x>0$，则$x+\frac{4}{x}$的

A．最大值为2　　B．最小值为2　　C．最大值为4　　D．最小值为4

5.若p： $f(x)$是奇函数，q： $y=f(x)$的图象经过坐标原点，则p是q的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6.如图1，正方形$SG_1G_2G_3$中，E、F分别是G_1G_2、G_2G_3的中点，D是EF的中点，沿SE、SF、EF将正方形折成一个四面体，使G_1、G_2、G_3重合，重合后的点记为G，则在四面体$S-EFG$中

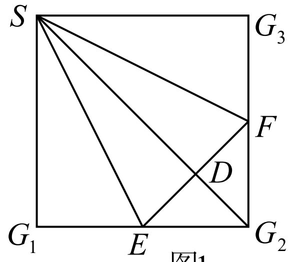


图1

A．$SG\perp$平面EFG　　B．$SD\perp$平面EFG

C．$GF\perp$平面SEF　　D．$GD\perp$平面SEF

7.双曲线C以椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$的焦点为顶点，以椭圆的顶

点为焦点，则双曲线C的方程为

A．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　C．$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

8.一个质量为$3kg$的物体作直线运动，设运动距离s（单位：m）与时间t（单位：s）的关系可用函数$s(t)=1+t^2$表示，并且物体的动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2$．则物体开始运动后第$5s$时的动能是

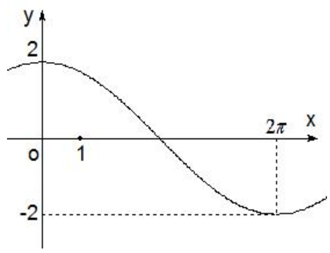
A．150　　B．75　　C．$\frac{75}{2}$　　D．$\frac{45}{2}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。

9．已知双曲线E的中心在原点，对称轴为坐标轴，渐近线方程为$y=\pm 2x$，则双曲线E的离心率为

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

10．如图是函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0)$的部分图象，则



（第10题图）

A．$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$　　B．$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

C．$f(x)=-2\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2})$　　D．$f(x)=2\cos(\frac{1}{2}x)$

11．已知$ab<0$，则

A．$a^2+b^2\geq 2ab$　　B．$a^2+b^2<2ab$　　C．$a(a-b)>0$　　D．$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geq 2$

12．已知随机变量X的取值为不大于$n(n\in N^*)$的非负整数，它的概率分布列为

X	0	1	2	3	$\cdots$	n
p	p_0	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

其中$p_i(i=0,1,2,3,\cdots,n)$满足$p_i\in[0,1]$，且$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_n=1$．定义由X生

成的函数$f(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots+p_ix^i+\cdots+p_nx^n$，$g(x)$为函数$f(x)$的导函数，$E(X)$为随机变量$X$的期望．现有一枚质地均匀的正四面体型骰子，四个面分别标有1，2，3，4个点数，这枚骰子连续抛掷两次，向下点数之和为X，此时由X生成的函数为$f_1(x)$，则

A．$E(X)=g(2)$　　B．$f_1(2)=\dfrac{15}{2}$　　C．$E(X)=g(1)$　　D．$f_1(2)=\dfrac{225}{4}$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分．

13. 某校在对学生是否喜欢数学的抽样调查中，随机抽取了300名学生，相关的数据如下表所示：

	喜欢数学课程	不喜欢数学课程	总计
男	37	85	122
女	35	143	178
总计	72	228	300

由表中数据直观分析，
该校学生的性别与是否喜欢数学之间________关系（填“有”或“无”）．

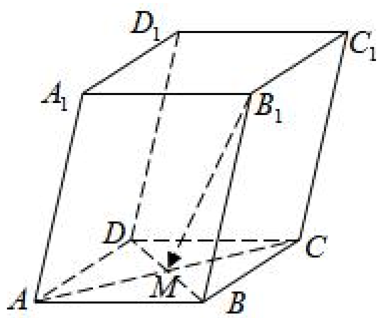
14. 命题p：每个指数函数都是单调函数，则它的否定$\neg p$：________________．

15. 若a、$b>0$，则$a+b\ge 2\sqrt{ab}$；若a、b、$c>0$，则$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$；若a、b、c、$d>0$，则$a+b+c+d\ge 4\sqrt[4]{abcd}$。猜想：若$a_1$、$a_2$、$a_3$、……、$a_n>0$，则________________．

16. 如图1，平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，AC与BD相交于M，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$、$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则

⑴$\overrightarrow{B_1M}=$__________（用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$表示）；

⑵若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三向量是两两成60°角的单位向量，则$|\overrightarrow{B_1M}|=$_________．



三、解答题：本大题共6小题，满分70分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

17．（**本小题满分10分**）

在ΔABC中，角A、B、C所对应的边分别为a、b、c．

⑴若$\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=2\cos A$，求$A$的值；

⑵若$\cos A=\dfrac{1}{3}$，$b=3c$，求证：ΔABC是直角三角形．

18．（**本小题满分12分**）

如图4，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=90^0$，$AB=2$，$BC=CC_1=4$，D是AA_1的中点．

⑴求四棱锥$B_1-A_1C_1CD$的体积；

⑵求证：$B_1D\perp$平面BCD．

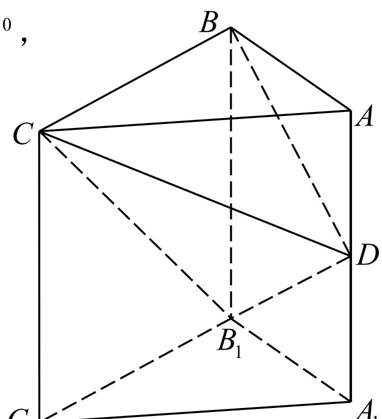


图4

19．（**本小题满分12分**）

已知数列$\{a_n\}$（$n\in N^*$）是递增的等比数列，且$a_1+a_3=5$，$a_1a_3=4$．

⑴求数列$\{a_n\}$的通项公式；

⑵若$b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n+1$，且$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m\le b_{45}$，求正整数$m$的最大值．

20.（**本小题满分12分**）

某次学业水平考试有1000人参加，其成绩的频率分布直方图如图5所示，规定85分及其以上为优秀.

⑴若成绩在$[75,80)$区间有50人，求成绩为优秀的学生人数；

⑵用分层抽样的方法从成绩在$[80,85)$和$[90,95)$区间的学生中抽取5人进行研究，问应抽取多少名成绩在$[90,95)$区间的学生？

⑶从⑵所抽取的5人中随机抽取2人，求成绩在$[80,85)$和$[90,95)$区间的学生恰好各有1人的概率.

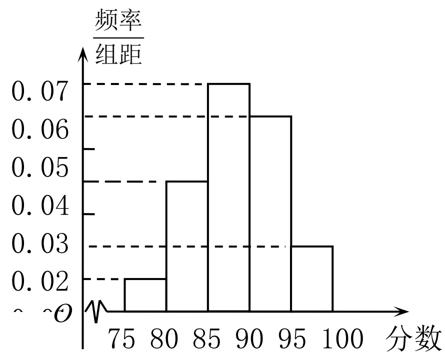


图5

21.（**本小题满分12分**）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的一个顶点为$A(0,2)$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

⑴求椭圆C的方程；

⑵若B是A关于坐标原点的对称点，试探究在椭圆C是否存在点P，使ΔABP为等腰三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）.

22.（**本小题满分12分**）

已知函数$f(x)=\ln x+(a-\dfrac{1}{2})x^2$，$a\in R$是常数.

⑴当$a=1$时，求函数$f(x)$在区间$[1,e]$上的最大值和最小值；

⑵若在区间$(1,+\infty)$上，函数$f(x)$的图象恒在直线$y=2ax$下方，求实数a的取值范围.

2022届广东省广州市中学教学研究会高三调研考试评分参考

一、单选题　　CABDD　ABA

二、多选题　　AB　BCD　ACD　CD

二、填空题

13. 有　　14. 存在一个指数函数，它不是单调函数（等价表达可相应给分）

15. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_n}$　　16. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$（2分），$\frac{\sqrt{5}}{2}$（3分）

三、解答题

17. ⑴由 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=2\cos A$ 得 $\sin A\cos\frac{\pi}{6}+\cos A\sin\frac{\pi}{6}=2\cos A$ ……2分，所以 $\sin A\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\times\frac{1}{2}=2\cos A$ ……3分，$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\frac{3}{2}\cos A$，$\tan A=\sqrt{3}$ ……4分，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ……6分

⑵由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ……8分，$=8c^2$ ……9分，因为 $a^2+c^2=9c^2=b^2$ ……11分，ΔABC 是直角三角形……12分

18. ⑴ $V_{B_1-A_1C_1CD}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{C-ABB_1D}$ ……1分，

$=\frac{1}{2}\times AB\times BC\times CC_1-\frac{1}{3}\times S_{ABB_1D}\times BC$ ……3分，$=\frac{1}{2}\times2\times4\times4-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(2+4)\times4\times2$ ……5分，$=8$ ……6分

（或：$V_{B_1-A_1C_1CD}=\frac{1}{3}\times S_{A_1C_1CD}\times h$ ……1分，$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(A_1D+C_1C)\times A_1C_1\times h$ ……2分，$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(A_1D+C_1C)\times A_1B_1\times B_1C_1$ ……3分，$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\times4$ ……5分，$=8$ ……6分）

⑵ $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $BB_1\perp$ 底面ABC，$BB_1\perp BC$，又 $\angle ABC=90^0$，所以 $BC\perp AB$，因为 $BB_1\cap AB=B$，所以 $BC\perp$ 面ABB_1A_1 ……7分，$B_1D\subset$ 面ABB_1A_1，所以 $B_1D\perp BC$ ……8分。

在ΔABD中，$\angle BAD = 90^0$，$AB = AD = 2$，所以$\angle ADB = 45^0$，同理，$\angle A_1DB_1 = 45^0$……11分，所以$\angle B_1DB = 90^0$，$B_1D \perp DB$……9分。因为$BC \bigcap DB = B$，所以$B_1D \perp$平面BCD……10分。

19.⑴由$a_1 + a_3 = 5$，$a_1a_3 = 4$解得$a_1 = 1$，$a_3 = 4$或$a_1 = 4$，$a_3 = 1$……1分，因为$\{a_n\}$递增，所以$a_1 = 1$，$a_3 = 4$……2分。$\{a_n\}$是等比数列，设公比为q，则$a_3 = a_1q^2$……3分，即$4 = 1 \times q^2$，解得$q = \pm 2$……4分，因为$\{a_n\}$递增，所以$q = 2$……5分，所以数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n = a_1q^{n-1} = 2^{n-1}$……6分。

⑵$b_n = \log_{\sqrt{2}} a_n + 1 = 2n - 1$……8分，

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m = \frac{1 + (2m-1)}{2} \times m = m^2$$

……10分，$b_{45} = 89$……11分，$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m \le b_{45}$即$m^2 \le 89$，$m \le \sqrt{89}$，正整数$m$的最大值为$m_{\max} = 9$……12分。

20.⑴依题意，成绩为优秀的学生为$\dfrac{0.07 + 0.06 + 0.02}{0.01} \times 50$……2分，

$= 750$（人）……3分

⑵应抽取成绩在$[90, 95)$区间的学生为$\dfrac{0.06}{0.04 + 0.06} \times 5$……5分，

$= 3$（人）……6分

⑶记⑵所抽取的成绩在$[90, 95)$区间的学生为A_1、A_2、A_3，成绩在$[80, 85)$区间的学生为B_1、B_2，从中随机抽取2人，不同的取法有A_1A_2、……、B_1B_2（不重不漏地列举）……9分，共10种……10分。其中，两区间的学生恰好各有1人的取法有（不重不漏地列举）……11分，共6种。因为每个取法的可能性相等，所以所求概率$P = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$……12分，

21.⑴依题意，$b = 2$……1分，解$\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$……3分，得$a^2 = 12$……4分，

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$……5分

⑵依题意$B(0, -2)$是椭圆C的下顶点……6分，以AB为底边的等腰三角形ΔABP有两个，此时P为椭圆C的左右端点……8分；AB是椭圆C的短轴，以A

为圆心、AB为半径的圆与椭圆C相交（不含B点）于P_1、P_2，ΔABP_1、ΔABP_2都是等腰三角形……10分；以B为圆心、AB为半径的圆与椭圆C相交（不含A点）于P_3、P_4，ΔABP_3、ΔABP_4都是等腰三角形……11分；设椭圆C的左右端点分别为M、N，则$AM=4=AB$，所以P_1、P_2与P_3、P_4分别与M、N重合，所以一共存在两个点P，使ΔABP为等腰三角形……12分。

22.⑴$a=1$时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2$在区间$[1,e]$上单调增加……2分，所以$f(x)$在区间$[1,e]$上的最大值$M=f(e)=1+\frac{e^2}{2}$……3分，最小值$m=f(1)=\frac{1}{2}$……4分。

⑵记$F(x)=f(x)-2ax=\ln x+(a-\frac{1}{2})x^2-2ax$，$x\in(1,+\infty)$

$F^{/}(x)=\frac{1}{x}+(2a-1)x-2a$……5分，由$F^{/}(x)=0$得$(2a-1)x^2-2ax+1=0$

若$a=\frac{1}{2}$，则$F^{/}(x)=\frac{1}{x}-1<0$……6分，$F(x)=\ln x-x$单调递减，$F(x)<F(1)=-1<0$……7分，函数$f(x)$的图象恒在直线$y=2ax$下方……8分

若$a>\frac{1}{2}$，则$a-\frac{1}{2}>0$，当$x\ge\frac{4a}{2a-1}(>1)$时，$F(x)=\ln x+(a-\frac{1}{2})x^2-2ax>0$，函数$f(x)$的图象不恒在直线$y=2ax$下方

若$a<\frac{1}{2}$，$F^{/}(x)=(x-1)[(2a-1)-\frac{1}{x}]<0$……10分，$F(x)$单调递减，$F(x)$的最大值为$F(1)=-(a+\frac{1}{2})$……10分，由$F(1)=-(a+\frac{1}{2})\le 0$得$a\ge-\frac{1}{2}$……11分。

综上所述，实数a的取值范围为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$……12分