

2020 学年第一学期高三调研考试数学试题参考答案与评分标准

评分说明:

1. 参考答案与评分标准给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与参考答案不同, 可根据试题主要考查的知识点和能力对照评分标准给以相应的分数.
2. 对解答题中的计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的得分, 但所给分数不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数, 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 1~8 小题为单项选择题, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的; 9~12 小题为多项选择题, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	B	B	D	C	C	AD	ABC	BC	BD

8. 解: 因为函数 $f(x+\pi)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+\pi) = f(x+\pi)$,

即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称, 即 $f(x) = f(2\pi-x)$.

又因为当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) = \cos x - x^3$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 因而在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递增, 因为 $4 < 2\pi - 2 < 6$, 所以 $f(4) < f(2\pi - 2) < f(6)$, 即 $f(4) < f(2) < f(6)$, 即 $b < a < c$. 故选 C.

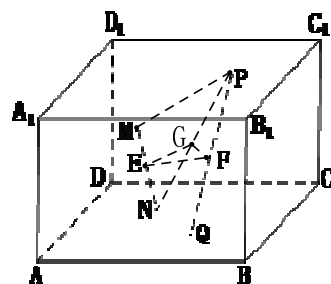
12. 解: 若 $MN \parallel PQ$, 则 M 、 N 、 P 、 Q 四点共面 γ , 当 $MN < PQ$ 时,

平面 DCC_1D_1 、 $ABCD$ 、 γ 两两相交有三条交线, 分别为 MP 、 NQ 、 CD , 则三条交线交于一点 O , 则 CD 与平面 γ 交于点 O , 则 EF 与 CD 不平行. 故 A 错误;

若 E 、 F 两点重合, 则 $MP \parallel NQ$, M 、 N 、 P 、 Q 四点共面 γ , 平面 DCC_1D_1 、 $ABCD$ 、 γ 两两相交有三条交线, 分别为 MP 、 NQ 、 CD , 由 $MP \parallel NQ$, 得 $MP \parallel NQ \parallel CD$, 故 B 正确;

若 MN 与 PQ 相交, 确定平面 γ , 平面 DCC_1D_1 、 $ABCD$ 、 γ 两两相交有三条交线, 分别为 MP 、 NQ 、 CD , 因为 $MP \parallel CD$, 所以 $MP \parallel NQ \parallel CD$, 所以 NQ 与 CD 不可能相交. 故 C 错误;

当 MN 与 PQ 是异面直线时, 如图, 连接 NP , 取 NP 中点 G , 连接 EG , FG . 则 $EG \parallel MP$, 因为 $MP \subset$ 平面 DCC_1D_1 , $EG \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 , 则 $EG \parallel$ 平面 DCC_1D_1 . 假设 $EF \parallel CD$, 因为 $CD \subset$ 平面 DCC_1D_1 , $EF \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 , 所以 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 .



又 $EF \cap EG = E$, $\therefore$ 平面 $EFG \parallel$ 平面 DCC_1D_1 , 同理可得, 平面 $EFG \parallel$ 平面

$ABCD$, 则平面 $DCC_1D_1 //$ 平面 $ABCD$, 与平面 $DCC_1D_1 \cap$ 平面 $ABCD = CD$ 矛盾. 所以假设错误, EF 不可能与 CD 平行, 故 D 正确. 故选 BD .

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $x + y = 0$

14. 25

15. $7+4\sqrt{3}$

16. $\sqrt{13}$

16. 解: 由题意知 $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$, $\cos \angle F_1BF_2 = -\frac{3}{5}$, 所以 $\cos \angle ABF_1 = \frac{3}{5}$, 即 $\frac{|AB|}{|BF_1|} = \frac{3}{5}$,

易得 $|AB|:|AF_1|:|BF_1| = 3:4:5$. 设 $|AB| = 3$, $|AF_1| = 4$, $|BF_1| = 5$, $|BF_2| = x$.

由双曲线的定义得: $3 + x - 4 = 5 - x$, 解得: $x = 3$, 所以 $|F_1F_2| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 4\sqrt{13}$

$\Rightarrow c = \sqrt{13}$, 因为 $2a = 5 - x = 2 \Rightarrow a = 1$, 所以离心率 $e = \sqrt{13}$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 满分 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

解: 已知 $4a \sin B = \sqrt{3}b \cos A + b \sin A$, 由正弦定理,

得 $4 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A + \sin B \sin A$,2 分

因为 B 为三角形内角, $\sin B \neq 0$,3 分

所以 $4 \sin A = \sqrt{3} \cos A + \sin A$, 即 $3 \sin A = \sqrt{3} \cos A$ 4 分

所以 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$,5 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$ 6 分

选择条件①的解析:

解法一: 由 $\sin B = \sqrt{3} \sin C$ 及正弦定理, 可得 $b = \sqrt{3}c$,7 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

则 $4 = (\sqrt{3}c)^2 + c^2 - 2 \cdot \sqrt{3}c \cdot c \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2})$,9 分

解得 $c = 2$10 分

解法二: 由 $\sin B = \sqrt{3} \sin C$, 又因为 $A = \frac{\pi}{6}$, 所以 $B = \frac{5\pi}{6} - C$,7 分

则 $\sin(\frac{5\pi}{6} - C) = \sqrt{3} \sin C$, 展开得, $\cos C = \sqrt{3} \sin C$,8 分

所以 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $C = \frac{\pi}{6}$

所以 $A = C$,9 分

所以 $c = 2$10 分

选择条件②的解析:

解法一: 由 $b = 4 \sin A$, 可得 $b = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2$,7 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得,8 分

$2^2 = 2^2 + c^2 - 2 \times 2 \times c \times \cos \frac{\pi}{6}$,9 分

解得 $c = 2\sqrt{3}$10 分

解法二: 由 $b = 4 \sin A$ 得 $b = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2$,7 分

因为 $a = 2$, 所以, $\triangle ABC$ 是以 C 为顶角的等边三角形.

所以 $A = B = \frac{\pi}{6}$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$8 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 得, $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{c}{\sin \frac{2\pi}{3}}$,9 分

解得 $c = 2\sqrt{3}$10 分

选择条件③的解析:

解法一: 由 $B + C = 2A$, 由因为 $A + B + C = \pi$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$,8 分

与 $A = \frac{\pi}{6}$ 矛盾, 则问题中的三角形不存在.10 分

解法二: 由 $B + C = 2A$, 则 $B + C = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

则 $A + B + C = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} < \pi$,8 分

与三角形内角和等于 π 矛盾, 因而三角形不存在.10 分

18. (12 分)

解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 依题意,

有 $2(a_2 + 1) = a_1 + a_3$ 1 分

将 $a_1 + a_3 = 2(a_2 + 1)$ 代入 $a_1 + a_2 + a_3 = 14$ 得 $2(a_2 + 1) + a_2 = 14$,

得 $a_2 = 4$2 分

联立 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 14 \\ a_2 = 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 14 \\ a_1 q = 4 \end{cases}$

两式两边相除消去 a_1 得 $2q^2 - 5q + 2 = 0$,

解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$ (舍去),3 分

所以 $a_1 = \frac{4}{2} = 2$4 分

所以, $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$5 分

(2) 解法一: 因为 $b_n = a_n \log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^n = -n \cdot 2^n$ 6 分

所以, $-T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$ ①7 分

$-2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$ ②8 分

① - ②, 得 $T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1}$ 9 分

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \times 2^{n+1} = 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+1} - 2. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+1} - 2. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

解法二: 因为 $b_n = a_n \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -n \cdot 2^n = (-2n+n) \cdot 2^n = \{-2(n+1)+4\} - (-n+2) \cdot 2^n$

所以 $b_n = [- (n+1) + 2] \cdot 2^{n+1} - (-n+2) \cdot 2^n \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

进而得

$$\begin{aligned} T_n &= [(-2+2) \cdot 2^2 - (-1+2) \cdot 2^1] + [(-3+2) \cdot 2^3 - (-2+2) \cdot 2^2] + \dots + \\ &\quad \{[-(n+1)+2] \cdot 2^{n+1} - (-n+2) \cdot 2^n\} \\ &= [- (n+1) + 2] \cdot 2^{n+1} - 2 = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (12 分)

解: (1) 连接 O_1C, O_1D , $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

因为 C, D 是半圆 $\widehat{AB}$ 上的两个三等分点,

所以 $\angle AO_1D = \angle DO_1C = \angle CO_1B = 60^\circ$,

又 $O_1A = O_1B = O_1C = O_1D$,

所以 $\triangle AO_1D, \triangle CO_1D, \triangle BO_1C$ 均为等边三角形.

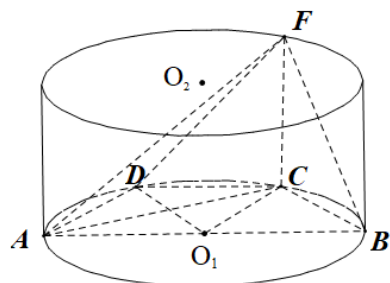
所以 $O_1A = AD = DC = CO_1$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以四边形 $ADCO_1$ 是平行四边形. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以 $CO_1 \parallel AD$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又因为 $CO_1 \not\subset$ 平面 AFD , $AD \subset$ 平面 AFD ,

所以 $CO_1 \parallel$ 平面 AFD . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



(2) 因为 FC 是圆柱 O_1O_2 的母线,

所以 $FC \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $FC \perp BC \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因为 AB 为圆 O_1 的直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AC = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } BC = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = 1,$$

所以在 $Rt\triangle FBC$ 中, $FC = BC \tan 45^\circ = 1 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(方法一) 因为 $BC \perp AC$, $BC \perp FC$, $AC \cap FC = C$,

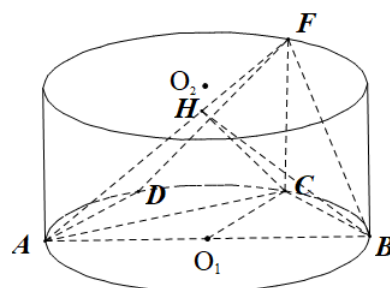
所以 $BC \perp$ 平面 FAC ,

又 $FA \subset$ 平面 FAC ,

所以 $BC \perp FA$.

在 $\triangle FAC$ 内, 作 $CH \perp FA$ 于点 H , 连接 BH .

因为 $BC \cap CH = C, BC, CH \subset \text{平面 } BCH$,
 所以 $FA \perp \text{平面 } BCH$,8 分
 又 $BH \subset \text{平面 } BCH$,
 所以 $FA \perp BH$,
 所以 $\angle BHC$ 就是二面角 $B-AF-C$ 的平面角.9 分



在 $Rt\triangle FCA$ 中, $FA = \sqrt{FC^2 + AC^2} = 2$,
 $CH = \frac{FC \cdot AC}{FA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 10 分

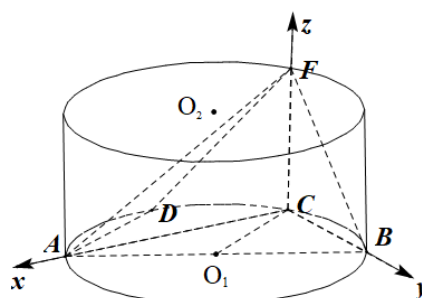
在 $Rt\triangle BCH$ 中, $\angle BCH = 90^\circ$,
 所以 $BH = \sqrt{BC^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$,11 分

所以 $\cos \angle BHC = \frac{CH}{BH} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

所以, 二面角 $B-AF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分

(方法二) 以 C 为坐标原点, 分别以 CA, CB, CF 所在直线为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), F(0, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ 8 分



设平面 AFB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n}, \\ \overrightarrow{AF} \perp \mathbf{n}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0, \\ -\sqrt{3}x + z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = z = \sqrt{3}$,

所以平面 AFB 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ 9 分

又因为平面 AFC 的一个法向量 $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$,10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 11 分

所以结合图形得, 二面角 $B-AF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分

20. (12 分)

解: (1) 由题意知对业务水平的满意的为 120 人, 对服务水平的满意的为 100 人, 得 2×2 列联表:

	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数	90	30	120
对业务水平不满意人数	10	10	20

合计	100	40	140
----	-----	----	-----

.....2 分

$$K^2 = \frac{140 \times (90 \times 10 - 30 \times 10)^2}{120 \times 20 \times 100 \times 40} = \frac{21}{4} = 5.25 > 5.024. \quad \text{.....3 分}$$

所以, 有 97.5% 的把握认为业务水平与服务水平有关.4 分

(2) X 的可能取值为 0, 1, 2.5 分

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{30}^2}{C_{40}^2} = \frac{29}{52}, \quad P(X=1) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{30}^1}{C_{40}^2} = \frac{20}{52}, \quad P(X=2) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{30}^0}{C_{40}^2} = \frac{3}{52}.$$

X	0	1	2
P	$\frac{29}{52}$	$\frac{20}{52}$	$\frac{3}{52}$

.....7 分

$$E(X) = 0 \times \frac{29}{52} + 1 \times \frac{20}{52} + 2 \times \frac{3}{52} = \frac{1}{2}. \quad \text{.....8 分}$$

(3) 在业务服务协议终止时, 对业务水平和服务水平两项都满意的客户流失的概率为 $\frac{90}{140} \times 5\% = \frac{9}{280}$, 只对其中一项不满意的客户流失率为 $\frac{40}{140} \times 40\% = \frac{32}{280}$, 对两项都不满

意的客户流失率为 $\frac{10}{140} \times 75\% = \frac{15}{280}$9 分

从该运营系统中任选一名客户流失的概率为 $\frac{9+32+15}{280} = \frac{1}{5}$10 分

在业务服务协议终止时, 从社区中任选 4 名客户, 至少有 2 名客户流失的概率为

$$P = 1 - C_4^0 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 - C_4^1 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} = \frac{113}{625}. \quad \text{.....12 分}$$

21. (12 分)

解: (1) 因为椭圆 C 的焦点在 x 轴上,

所以设它的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).1 分

$$\text{由椭圆的定义得 } 2a = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} = 2\sqrt{2},$$

所以 $a = \sqrt{2}$2 分

又因为 $c = 1$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$3 分

因此, 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$4 分

$$(2) \text{ 根据题意可设直线 } AB \text{ 的方程为 } y = -x + n, \text{ 联立 } \begin{cases} y = -x + n, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

整理得 $3x^2 - 4nx + 2n^2 - 2 = 0$,5 分

由 $\Delta = (-4n)^2 - 4 \times 3(2n^2 - 2) > 0$, 得 $n^2 < 3$6 分

设 $A(x_1, -x_1 + n)$, $B(x_2, -x_2 + n)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{4n}{3}$, $x_1 x_2 = \frac{2n^2 - 2}{3}$7 分

又设 AB 的中点为 $M(x_0, -x_0 + n)$, 则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2n}{3}$, $-x_0 + n = \frac{n}{3}$.

由于点 M 在直线 $y = x + m$ 上,

所以 $\frac{n}{3} = \frac{2n}{3} + m$, 得 $n = -3m$,8 分

代入 $n^2 < 3$, 得 $9m^2 < 3$, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ①.9 分

因为 $\overrightarrow{QA} = (x_1, -x_1 + n - 2)$, $\overrightarrow{QB} = (x_2, -x_2 + n - 2)$, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} &= 2x_1 x_2 - (n - 2)(x_1 + x_2) + (n - 2)^2 \\ &= \frac{4n^2 - 4}{3} - \frac{4n^2 - 8n}{3} + \frac{3(n^2 - 4n + 4)}{3} = \frac{3n^2 - 4n + 8}{3}. \text{10 分}\end{aligned}$$

由 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} < 4$, 得 $3n^2 - 4n + 8 < 12$, $3n^2 - 4n - 4 < 0$

得 $-\frac{2}{3} < n < 2$, 得 $-\frac{2}{3} < -3m < 2$, 所以 $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{9}$ ②.11 分

由①②得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{2}{9}$. 故实数 m 的取值范围为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{9}\right)$12 分

22. (12 分)

解: (1) 函数 $f(x) = \ln x - (a+1)x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$1 分

则 $f'(x) = \frac{1}{x} - (a+1)$2 分

(i) 当 $a+1 > 0$, 即 $a > -1$ 时,

令 $f'(x) = \frac{1}{x} - (a+1) > 0$ 得, $\frac{1}{x} > a+1$, 得 $x < \frac{1}{a+1}$,

又因为 $x > 0$, 所以 $0 < x < \frac{1}{a+1}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$ 上单调递减.3 分

(ii) 当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $-(a+1) \geq 0$,

又由 $x > 0$ 得 $f'(x) > 0$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.4 分

综上. 当 $a > -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$ 上单调递减; 当

$a \leq -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.5 分

(2) 解法一: $g(x) = f(x) + x + 1 = \ln x + 1 - ax$,

函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $g'(x) = \frac{1}{x} - a$

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 不可能有两个零点;6 分

(ii) 当 $a > 0$ 时, 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上, $g'(x) > 0$, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上, $g'(x) < 0$7 分

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, 此时 $g\left(\frac{1}{a}\right)$ 为函数 $g(x)$ 的最大值.8 分

若 $g\left(\frac{1}{a}\right) \leq 0$, 则 $g(x)$ 最多有一个零点, 不合题意. 所以 $g\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} > 0$,

解得 $0 < a < 1$9 分

此时 $\frac{1}{e} < \frac{1}{a} < \frac{e^2}{a^2}$, 且 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \frac{a}{e} + 1 = -\frac{a}{e} < 0$,

$g\left(\frac{e^2}{a^2}\right) = 2 - 2\ln a - \frac{e^2}{a} + 1 = 3 - 2\ln a - \frac{e^2}{a} (0 < a < 1)$ 10 分

令 $G(a) = 3 - 2\ln a - \frac{e^2}{a} (0 < a < 1)$, 则 $G'(a) = -\frac{2}{a} + \frac{e^2}{a^2} = \frac{e^2 - 2a}{a^2} > 0$

所以 $G(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

所以 $G(a) < G(1) = 3 - e^2 < 0$, 即 $g\left(\frac{e^2}{a^2}\right) < 0$11 分

故函数 $g(x)$ 有两个不同的零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $x_1 \in \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{a}\right), x_2 \in \left(\frac{1}{a}, \frac{e^2}{a^2}\right)$.

综上, a 的取值范围是 $(0, 1)$12 分

解法二:

因为 $g(x) = \ln x + 1 - ax = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 + \ln x}{x}$ 6 分

所以“函数 $g(x)$ 有两个零点”等价于“直线 $y = a$ 与函数 $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ 的图象有两个交点”
.....7 分

$h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

则 $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$ 8 分

得函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数 $h(x)$ 的最大值为 $h(1) = 1$,
.....9 分

又因为函数 $h(x)$ 在其定义域 $(0, +\infty)$ 上连续不断，（这个理由可以不写）

且易知当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时， $h(x) < 0$ ；当 $x > \frac{1}{e}$ 时， $h(x) > 0$ ，

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow 0$ 10 分

所以当函数 $g(x)$ 有两个零点时，只需满足 $0 < a < h_{\max}(x)$ ，11 分

即 a 的取值范围为 $(0, 1)$ 12 分

注：求最大值后也可以画图象说明：

