

2021 届高三教学质量检测(一)试卷

数学

2020.9

注意:

1. 本试卷共 4 页, 22 小题, 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上. 正确粘贴条形码.
3. 作答选择题时, 用 2B 铅笔在答题卡上对应答案的选项涂黑.
4. 非选择题的答案必须写在答题卡各题目的指定区域内相应位置上; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.
5. 考试结束后, 考生上交答题卡.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $\frac{2}{1-i}$ 的共轭复数是

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-1-i$ D. $-1+i$

2. 已知集合 $M = \{x | x^2 - x \leq 0\}$, $N = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$

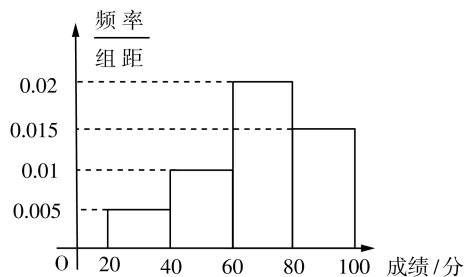
- A. $[-1, 0]$ B. $(0, 1)$ C. $[0, 1]$ D. $\emptyset$

3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的准线为 l , 圆 $M: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 与 l 相切, 则 $p =$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 某学校组织学生参加数学测试, 某班成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$. 若不低于 60 分的人数是 35 人, 则该班的学生人数是

- A. 45
B. 50
C. 55
D. 65



5. 中国古代数学名著《周髀算经》记载的“日月历法”曰: “阴阳之数, 日月之法, 十九岁为一章, 四章为一部, 部七十六岁, 二十部为一遂, 遂千百五十二岁, … 生数皆终, 万物复苏, 天以更元作纪历”. 某老年公寓住有 20 位老人, 他们的年龄(都为正整数)之和恰好为一遂, 其中最年长者的年龄在 $(90, 100)$ 之间, 其余 19 人的年龄依次相差一岁, 则最年长者的年龄为

- A. 94 B. 95 C. 96 D. 98

6. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $2\sin(\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha - 1$, 则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB=1, AC=\sqrt{3}, AB \perp AC, AA_1=4$, 则球 O 的表面积为

- A. 5π B. 10π C. 20π D. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$

8. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 且 $f(x+\pi)$ 为偶函数. 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) = \cos x - x^3$, 设 $a=f(2), b=f(4), c=f(6)$. 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 设 a, b, c 为正实数, 且 $a > b$, 则

- A. $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ B. $a - \frac{1}{b} > b - \frac{1}{a}$ C. $\ln(a-b) > 0$ D. $a(c^2+1) > b(c^2+1)$

10. 已知曲线 $C_1: y=2\sin x, C_2: y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$, 则

A. 把 C_1 上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

C. 把 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把得到的曲线上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到曲线 C_2

D. 把 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把得到的曲线上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到曲线 C_2

11. 对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 同时满足: (1) 当 $a+b=0$ 时, 有 $f(a)+f(b)=0$; (2) 当 $a+b>0$ 时, 有 $f(a)+f(b)>0$, 则称 $f(x)$ 为 Ω 函数. 下列是 Ω 函数的有

- A. $f(x) = e^x + e^{-x}$ B. $f(x) = e^x - e^{-x}$
C. $f(x) = x - \sin x$ D. $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ -\frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$

12. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, P 是平面 DCC_1D_1 内不同的两点, N, Q 是平面 $ABCD$ 内不同的两点, 且 $M, P, N, Q \notin CD$, E, F 分别是线段 MN, PQ 的中点. 则下列结论正确的是

- A. 若 $MN \parallel PQ$, 则 $EF \parallel CD$
B. 若 E, F 重合, 则 $MP \parallel CD$
C. 若 MN 与 PQ 相交, 且 $MP \parallel CD$, 则 NQ 可以与 CD 相交
D. 若 MN 与 PQ 是异面直线, 则 EF 不可能与 CD 平行

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 函数 $f(x)=x^3-2x^2$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

14. $(x^2-2)(x+\frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中 x^8 的系数为_____. (用数字填写答案)

15. 已知向量 $m=(1, a), n=(2b-1, 3)(a>0, b>0)$, 若 $m \perp n$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为_____.

16. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点, 以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的左支交于点 A , AF_2 与 C 的右支交于点 B , $\cos \angle F_1BF_2 = -\frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $\sin B = \sqrt{3} \sin C$, ② $b = 4 \sin A$, ③ $B + C = 2A$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $4a \sin B = \sqrt{3} b \cos A + b \sin A$, $a = 2$, _____?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, $a_1 + a_2 + a_3 = 14$, 且 $a_2 + 1$ 是 a_1, a_3 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

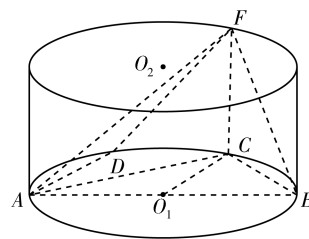
(2) 若 $b_n = a_n \log_2 (\frac{1}{2})^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在圆柱 O_1O_2 中, AB 为圆 O_1 的直径, C, D 是弧 $\widehat{AB}$ 上的两个三等分点, CF 是圆柱 O_1O_2 的母线.

(1) 求证: $CO_1 \parallel$ 平面 AFD ;

(2) 设 $AC = \sqrt{3}$, $\angle FBC = 45^\circ$, 求二面角 $B-AF-C$ 的余弦值.



20. (12 分)

某市广电运营商为了解该市广电网络从业人员的业务水平与服务水平,随机调查了 140 名客户,结果显示;业务水平的满意率为 $\frac{6}{7}$,服务水平的满意率为 $\frac{5}{7}$,两者都满意的有 90 名客户.

(1)根据上述结果完成下面 2×2 列联表,并判断是否有 97.5% 的把握认为该市广电网络从业人员的业务水平与服务水平有关;

	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数			
对业务水平不满意人数			
合计			

(2)若从对服务水平不满意的客户中,随机抽取 2 名征求改进意见,用 X 表示对业务水平不满意的人数,求 X 的分布列与期望;

(3)若用频率代替概率,假定在业务服务协议终止时,对业务水平和服务水平两项都满意的客户流失率为 5%,只对其中一项不满意的客户流失率为 40%,对两项都不满意的客户流失率为 75%,从该社区中任选 4 名客户,估计在业务服务协议终止时至少有 2 名客户流失的概率为多少?

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n \times (ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a + b + c + d$$

21. (12 分)

已知椭圆 C 的两个焦点分别是 $(-1, 0), (1, 0)$, 并且经过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)已知点 $Q(0, 2)$, 若 C 上总存在两个点 A, B 关于直线 $y = x + m$ 对称, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} < 4$, 求实数 m 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - (a+1)x, a \in \mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x) = f(x) + x + 1$, 若函数 $g(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围.