

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数 学

本试卷共 5 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：**1. 答卷前，考生务必将自己的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上。将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x \mid -7 < 3x - 1 < 2\}$ ， $N = \{x \mid x + 1 > 0\}$ ，则 $M \cup N =$
A. $(-2, +\infty)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-1, +\infty)$
2. 若复数 z 满足 $(z-1)(1+i) = 2-2i$ ，则 $|z| =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 5 D. $\sqrt{5}$
3. 已知函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，则 $f(2e) =$
A. $2e^2$ B. $2e$ C. $1 + \ln 2$ D. $2\ln 2$
4. 函数 $f(x) = \cos 2x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值为
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n - 1$ ，则数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前 10 项和等于
A. 1023 B. 55 C. 45 D. 35
6. 已知 a, b 是两个正数，4 是 2^a 与 16^b 的等比中项，则下列说法正确的是
A. ab 的最小值是 1 B. ab 的最大值是 1
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值是 $\frac{9}{2}$
7. 《算数书》是我国现存最早的系统性数学典籍，其中记载有求“囷盖”的术：置如其周，令相乘也，又以高乘之，三十六成一。该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h ，计算其体积 V 的近似公式 $V \approx \frac{1}{36}L^2h$ 。用该术可求得圆周率 π 的近似值。



现用该术求得 π 的近似值, 并计算得一个底面直径和母线长相等的圆锥的表面积的近似值为 9, 则该圆锥体积的近似值为

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. 3

8. 若 $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)^3 (x+a)^2 (a>0)$ 的展开式中 x^4 的系数为 3, 则 $a =$

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{4+m} + \frac{y^2}{1+m} = 1$ ($m \neq -1$, 且 $m \neq -4$), 则下列结论正确的是

- A. 若曲线 C 为椭圆或双曲线, 则其焦点坐标为 $(\pm\sqrt{3}, 0)$
 B. 若曲线 C 是椭圆, 则 $m > -1$
 C. 若 $m < -1$ 且 $m \neq -4$, 则曲线 C 是双曲线
 D. 直线 $kx - y - k = 0$ ($k \in \mathbf{R}$) 与曲线 C 恒有两个交点

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$, 则下列判断正确的是

- A. $f(x)$ 的值域为 $(0, 1]$ B. $f(x)$ 的周期为 2
 C. $f(x+1)$ 是偶函数 D. $f(2021) = 1$

11. 已知函数 $f(x) = \cos x + \lambda \sin x$, 则下列说法正确的是

- A. 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{5}$, 则 $\lambda = 2$
 B. 若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\exists \lambda \in (0, 1)$ 使得 $f(x) = \lambda$ 成立
 C. 若 $\lambda = \sqrt{3}$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 都有 $|f(x) - m| < 1$ 成立, 则 $m \in (1, 2)$
 D. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最大值, 则正实数 λ 的取值范围是 $(0, \sqrt{3})$

12. 数学家华罗庚曾说: “数缺形时少直观, 形少数时难入微.” 事实上, 很多代数问题可以转化为几何问题加以解决. 例如, 与 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 相关的代数问题, 可以转化为点 $A(x, y)$ 与点 $B(a, b)$ 之间的距离的几何问题. 结合上述观点, 对于函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, 下列结论正确的是

- A. $f(x) = 6$ 无解
 B. $f(x) = 6$ 的解为 $x = \pm \frac{6\sqrt{5}}{5}$
 C. $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$
 D. $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $|a|=1$, $|b|=\sqrt{3}$, 且 $|a-b|=2$, 则 $|a+2b| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 某圆形广场外围有 12 盏灯, 如右图所示, 为了节能每天晚上 12 时关掉其中 4 盏灯, 则恰好每间隔 2 盏灯关掉 1 盏的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线过抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB|=3\sqrt{2}$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$, $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

16. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB=AC=BC=AD=CD=2$, 二面角 $B-AC-D$ 为 120° , 则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1$, $\underline{\hspace{2cm}}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{4^n}{(2^{a_n+1}-1)(2^{a_{n+1}+1}-1)}$, 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, T_n < \frac{1}{9}.$$

从下列三个条件中任选一个, 补充在上面问题的横线中, 然后对题目进行求解.

条件①: $S_n = na_n - n^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$;

条件②: $nS_{n+1} = (n+1)S_n + n^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$;

条件③: $\sqrt{S_{n+1}} = \sqrt{S_n} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $a \cdot \sin A + a \cdot \sin C \cdot \cos B + b \cdot \sin C \cdot \cos A = b \cdot \sin B + c \cdot \sin A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b=3\sqrt{6}$, $c=3\sqrt{2}$, 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.



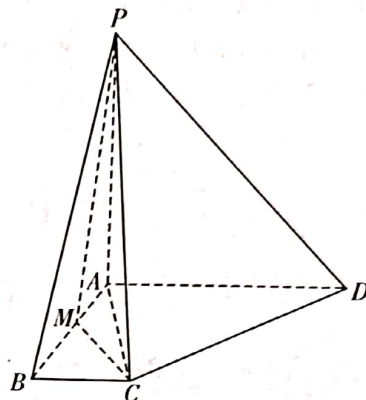
19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $PA = AD = 2AB = 4BC = 4$, $PC = \sqrt{21}$.

(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 线段 AB 上是否存在一点 M , 使得 MC 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{221}}{17}$?

若存在, 请求出 $\frac{AM}{AB}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 过椭圆 C 右焦点并垂直于 x 轴的直线 PM 交椭圆 C 于 P, M (点 P 位于 x 轴上方) 两点, 且 $\triangle OPM$ (O 为坐标原点) 的面积为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 l 交椭圆 C 于 A, B (A, B 异于点 P) 两点, 且直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{9}{4}$, 求点 P 到直线 l 距离的最大值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 设 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 + 2\ln a > 0$.



22. (12 分)

在新冠肺炎疫情肆虐之初，作为重要防控物资之一的口罩是医务人员和人民群众抗击疫情的武器与保障，为了打赢疫情防控阻击战，我国企业依靠自身强大的科研能力，果断转产自行研制新型全自动高速口罩生产机，“争分夺秒、保质保量”成为口罩生产线上的重要标语。

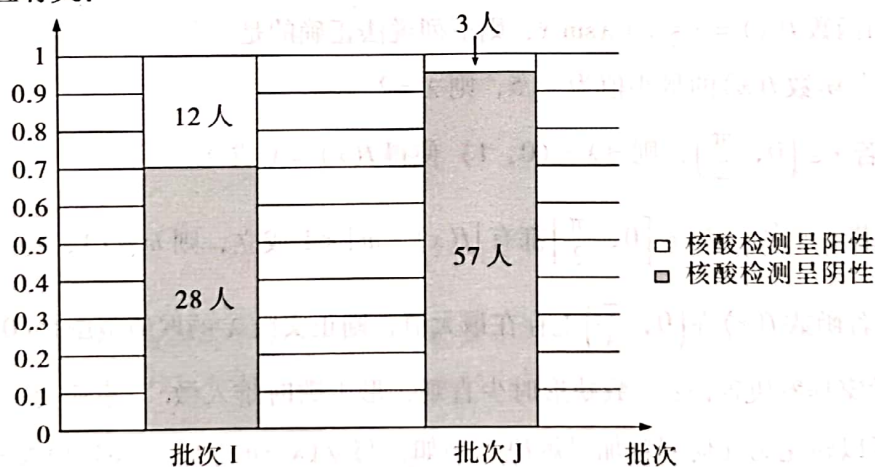
(1) 在试产初期，某新型全自动高速口罩生产流水线有四道工序，前三道工序完成成品口罩的生产且互不影响，第四道是检测工序，包括红外线自动检测与人工抽检。已知批次 I 的成品口罩生产中，前三道工序的次品率分别为 $p_1 = \frac{1}{35}$, $p_2 =$

$$\frac{1}{34}, p_3 = \frac{1}{33}.$$

①求批次 I 成品口罩的次品率 p_1 .

②第四道工序中红外线自动检测为次品的口罩会被自动淘汰，合格的口罩进入流水线并由工人进行抽查检验。已知批次 I 的成品口罩红外线自动检测显示合格率为 92%，求工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个口罩恰为合格品的概率（百分号前保留两位小数）。

(2) 已知某批次成品口罩的次品率为 $p(0 < p < 1)$ ，设 100 个成品口罩中恰有 1 个不合格品的概率为 $\varphi(p)$ ，记 $\varphi(p)$ 的最大值点为 p_0 ，改进生产线后批次 J 的口罩的次品率 $p_J = p_0$ 。某医院获得批次 I, J 的口罩捐赠并分发给该院医务人员使用。经统计，正常佩戴使用这两个批次的口罩期间，该院医务人员核酸检测情况如下面条形图所示，求 p_0 ，并判断是否有 99.9% 的把握认为口罩质量与感染新冠肺炎病毒的风险有关？



$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.005	0.001
k	3.841	6.635	7.879	10.828

