巴蜀中学2021届高考适应性月考卷（十）

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	B	B	D	B	D

【解析】

1．$\dfrac{(1-2\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\dfrac{\mathrm{i}+2}{-1}=-2-\mathrm{i}$，则其共轭复数为$-2+\mathrm{i}$，故选D.

2．集合$A=\left(-1，-\dfrac{1}{2}\right)$，$A\cap B=\left(-1，-\dfrac{3}{4}\right]$，故选B.

4．$S_1=16$，$q=\dfrac{1}{2}$，设前6个正方形的面积之和为T_6，$T_6=\dfrac{16\left(1-\dfrac{1}{2^6}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{63}{2}$，故选B.

5．古典概型，任意选取两个面的点数，有$\mathrm{C}_6^2=15$种情况，符合点数之和等于8的有两种：$(2，6)$，$(3，5)$，所以概率$P=\dfrac{2}{15}$，故选B.

6．以PQ为直径的圆最小，则圆心为$C(3，4)$，半径为$\sqrt{2}$，圆心到原点的距离为5，则M到原点O距离的最小值为$[5-\sqrt{2}，5+\sqrt{2}]$，故选D.

7．以A为原点，AB为x轴，AD为y轴建系，设点$M(x，y)$，且满足$y=\sqrt{3}-\sqrt{3}x$，点$C(2，\sqrt{3})$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=x(x-2)+y(y-\sqrt{3})=4x^2-5x$，其中$0\leqslant x\leqslant 1$，当$x=\dfrac{5}{8}$时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$的最小值为$-\dfrac{25}{16}$，故选B.

8．$\because f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$，$\therefore f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}=1$，令$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$，则$g(x)+g(-x)=0$，可得$g(x)$是奇函数，且$x\in\mathbf{R}$是减函数，由$f(a\cdot\mathrm{e}^x)+f(1-2x)\leqslant 1$，得$f(a\cdot\mathrm{e}^x)-\dfrac{1}{2}\leqslant -f(1-2x)+\dfrac{1}{2}=-\left[f(1-2x)-\dfrac{1}{2}\right]$，即$g(a\cdot\mathrm{e}^x)\leqslant -g(1-2x)=g(2x-1)$，即

$a \geqslant \dfrac{2x-1}{e^x} = h(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立．由 $h'(x) = \dfrac{3-2x}{e^x}$，$h(x)$ 的最大值为 $h\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$，可得 $a \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$，故选 D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分）

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABC	ABC	BC

【解析】

9．A 中方差为零，说明 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$，故 A 正确；选项 B 中 $y_i = 2x_i + 1(i = 1，2，\cdots，n)$，所以 $y = 2x + 1 = 7$，所以 B 错误；选项 C 符合百分位数的定义，正确；选项 D 中样本数据具有随机性，样本的众数不一定是总体的众数，故选 AC.

10．选项 A 中 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} > 0$，正确；选项 B 中 $\left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b}\right)(a+2b) = 4 + \dfrac{4b}{a} + \dfrac{a}{b} \geqslant 8$，正确；选项 C 中 $ab = 1，a > b > 0，a > 1 > b > 0，a + \dfrac{1}{b} = 2a > 2，\dfrac{b}{2^a} = \dfrac{1}{a2^a} < \dfrac{1}{2}$，C 正确；选项 D 中 $y = \sin x$ 不是单调函数，故 D 不正确，故选 ABC.

11．由图可得 $f(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$，可知 ABC 正确，故选 ABC.

12．选项 A 错误；选项 B，在 $\triangle ACG$ 中，$CG \perp AA_1$，$AB \perp CG，AB \cap AA_1 = A$，$CG \perp$ 平面 ABB_1A_1，故 B 正确；选项 C 中，$V = S_{\triangle ABC}h = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 C 正确；选项 D 中，如图 1，连接 DF，则 $DF \,//\, BC$，在 $\triangle A_1DF$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle A_1FD = \dfrac{|A_1F|^2 + |DF|^2 - |A_1D|^2}{2|A_1F||DF|} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故 D 错误，故选 BC.

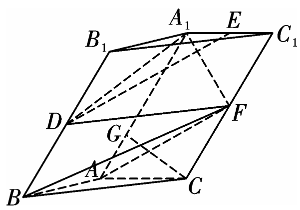

图 1

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	-160	1	$\dfrac{19}{7}$	$2p，\dfrac{3}{4}p$

【解析】

13．$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开的常数项是 $\mathrm{C}_6^3(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3=-160$．

14．因为 $f(x)=ax+\frac{2x}{2^x-1}(x\neq 0)$，且 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，

$-ax-\frac{2x}{2^{-x}-1}=ax+\frac{2x}{2^x-1}$，$-a-\frac{2}{2^{-x}-1}=a+\frac{2}{2^x-1}$，$2a+\frac{2}{2^x-1}-\frac{2\times 2^x}{2^x-1}=0$，即 $2a=2$，

所以实数 $a=1$．

15．如图 2，分别延长 AA_1，BB_1，CC_1 相交于点 P，记 $V_{P-A_1B_1C_1}=V$，则 $V_{P-DEF}=8V$，$V_{P-ABC}=27V$，

则 $V_1=19V$，$V_2=7V$，则 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{7}$．

另解：因为 $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$，则记 S_1, S_2, S_3 分别表示 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle DEF, \triangle ABC$ 的面积，则 $S_1:S_2:S_3=1:4:9$，令 $S_1=S$，则 $S_2=4S, S_3=9S$，设两个三棱台的高都是 h，则 $V_2=\frac{1}{3}(S+4S+\sqrt{4S^2})h=\frac{7}{3}Sh$，$V_1=\frac{1}{3}(4S+9S+\sqrt{36S^2})h=\frac{19}{3}Sh$，

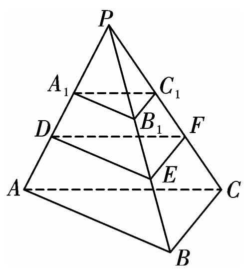

图 2

故 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{7}$．

16．因为 AB 与 x 轴垂直，则 $k_{OA}=\frac{2p}{y_0}=1$，则 $y_0=2p$，$x_0=2p$；设 OA 的中点 $M\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$，

则 MB 直线斜率为 $-\frac{y_0}{2p}=\frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0}{2}-x_B}$，解得 $x_B=\frac{1}{2}x_0+p$，而 $|AB|=|OB|=\frac{1}{2}x_0+p$，

$|AN|=\frac{1}{2}|AF|=\frac{1}{2}x_0+\frac{p}{4}$，则 $|AB|-|AN|=\frac{3}{4}p$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）$(2b-a)\cos C=c\cos A\Rightarrow(2\sin B-\sin A)\cos C=\sin C\cos A,$

$\therefore 2\sin B\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

而在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B\neq 0,$

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=60°$. ……………………………………………………………………（5 分）

（2）选条件①：

由正弦定理有：$\sin A\sin B=\frac{ab}{c^2}\sin^2 60°=\frac{1}{12}\Rightarrow ab=\frac{4}{3}$,

由余弦定理有：$c^2=(a+b)^2-2ab-2ab\cos 60°=(a+b)^2-3ab=(a+b)^2-4$,

$\therefore (a+b)^2=16\Rightarrow a+b=4$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=4+2\sqrt{3}$. ………………………………………………（10 分）

选条件②：

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow ab=\frac{4}{3}$,

由余弦定理有：$c^2=(a+b)^2-2ab-2ab\cos 60°=(a+b)^2-3ab=(a+b)^2-4$,

$\therefore (a+b)^2=16\Rightarrow a+b=4$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=4+2\sqrt{3}$. ………………………………………………（10 分）

选条件③：

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos 60°=\frac{2}{3}\Rightarrow ab=\frac{4}{3}$,

由余弦定理有：$c^2=(a+b)^2-2ab-2ab\cos 60°=(a+b)^2-3ab=(a+b)^2-4$,

$\therefore (a+b)^2=16\Rightarrow a+b=4$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=4+2\sqrt{3}$. ………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-2\Rightarrow a_1=2$，

又 $S_n=2a_n-2$ ①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$ ②，

①−②得：$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$，

$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=2^n$. ……………………………………………………………………………（6 分）

（2）$T_n=3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n+1)\cdot 2^n$ ③，

又 $2T_n=3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n+(2n+1)2^{n+1}$ ④，

④−③得：$T_n=-3\times2^1-2(2^2+2^3+\cdots+2^n)+(2n+1)2^{n+1}=-6+8-2\times2^{n+1}+(2n+1)\bullet2^{n+1}$

$=(2n-1)\bullet2^{n+1}+2$.

…………………………………………………………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）X 的所有取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$， $P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$， $P(X=2)=\dfrac{C_4^0C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，

∴X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

∴ $E(X)=0\times\dfrac{2}{5}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{3}$. ………………………………………………（6 分）

（2）对 $y=me^{nx}(m>0)$ 两边取自然对数得： $\ln y=\ln m+nx$ ，设 $t=\ln y$ ，

∴ $t=\ln m+nx$ ，

∵ $n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_it_i-6\overline{x}\,\overline{t}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\dfrac{31.89-6\times3.5\times1.16}{91-6\times3.5^2}\approx0.43$ ，

$\overline{t}=\ln m+n\overline{x}\Rightarrow\ln m=\overline{t}-0.43\overline{x}=1.16-0.43\times3.5\approx-0.35$ ，

又 $e^{-0.35}\approx0.7047$，

∴ $m\approx0.70$ ，∴ $y=0.70\bullet e^{0.43x}$. ……………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 3，过点 S 作 $SH\perp AC$ 于 H ，连接 BH .

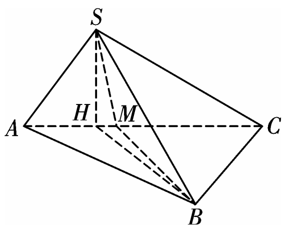

图 3

在直角三角形 ASC 中，计算得： $SH=3$ ， $AH=\sqrt{3}$，

在△ABH 中，由余弦定理得：$BH^2=\sqrt{3}^2+6^2-2\times6\times\sqrt{3}\bullet\cos30^\circ$

$=21\Rightarrow BH=\sqrt{21}$，

在△SHB 中， $SH=3$ ， $BH=\sqrt{21}$， $SB=\sqrt{30}$ ，

∴ $SB^2=SH^2+BH^2$，

$\therefore SH \perp HB$，又 $SH \perp AC$，$\therefore SH \perp$ 平面 ABC，

$\therefore$ 平面 $ASC \perp$ 平面 ABC. ……………………………………………………………………（5 分）

（2）解：以 H 为坐标原点，HA 为 x 轴，

在平面 ABC 上垂直于 AC 的直线为 y 轴，HS 为 z 轴，建立如图 4 的直角坐标系.

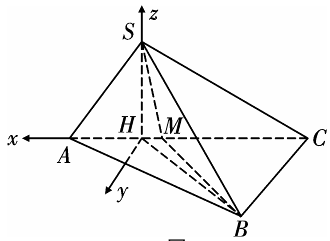

图 4

由（1）知：$S(0,\ 0,\ 3)$，$B(-2\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，

设 $M(t,\ 0,\ 0)$，

显然平面 ASM 的一个法向量 $\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$，

设平面 SMB 的一个法向量 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

$\because \overrightarrow{SM}=(t,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{SB}=(-2\sqrt{3},\ 3,\ -3)$，

$\therefore \begin{cases} tx-3z=0, \\ -2\sqrt{3}x+3y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(3,\ t+2\sqrt{3},\ t)$，

$\therefore |\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle|=\dfrac{|t+2\sqrt{3}|}{1\cdot\sqrt{3^2+(t+2\sqrt{3})^2+t^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

此时 $AM=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$，经检验，$AM=\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$ 符合题意.

………………………………………………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-ax^2+b$，$x\in\mathbf{R}$，

则 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2ax=\dfrac{3}{2}x\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>0$ 或 $x<\dfrac{4}{3}a$，$f'(x)<0\Rightarrow \dfrac{4}{3}a<x<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \dfrac{4}{3}a\right)$ 上单调递增，$\left(\dfrac{4}{3}a,\ 0\right)$ 上单调递减，$(0,\ +\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>\dfrac{4}{3}a$ 或 $x<0$，$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<\dfrac{4}{3}a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递增，$\left(0,\ \dfrac{4}{3}a\right)$ 上单调递减，$\left(\dfrac{4}{3}a,\ +\infty\right)$ 上单调递增；

综上所述：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \frac{4}{3}a\right)$ 上单调递增，$\left(\frac{4}{3}a,\ 0\right)$ 上单调递减，$(0,\ +\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递增，$\left(0,\ \frac{4}{3}a\right)$ 上单调递减，$\left(\frac{4}{3}a,\ +\infty\right)$ 上单调递增.

……………………………………………………………………………………（4 分）

（2）$h(x)=f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax$，因为 $h(x)$ 与 $g(x)$ 有公共点，且在公共点处的切线方程相同，

设公共点为 $(x_0,\ y_0)$，

所以 $h'(x)=3x-2a,\ g'(x)=\frac{a^2}{x}$，则 $3x_0-2a=\frac{a^2}{x_0}$，且 $x_0>0,\ a>0$，解得 $x_0=a$,

又因为 $\frac{3}{2}x_0^2-2ax_0=a^2\ln x_0+m$，则 $m=-\frac{1}{2}a^2-a^2\ln a,\ a>0$,

令 $\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2-x^2\ln x(x>0)$，$\varphi'(x)=-2x(1+\ln x)$,

当 $x\in\left(0,\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\ +\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递增，$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\ +\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$，故实数 m 的最大值为 $\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$.

……………………………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

解：（1）设椭圆 C 的长轴长为 $2a(a>0)$,

则由 F_1 发出的光经椭圆两次反射后回到 F_1 经过的路程为 $2a+2a=4a=\frac{8\sqrt{3}}{3}c$，

从而 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………（3 分）

（2）法一：如图 5，延长 F_2H, F_1P 交于点 F_0,

在 $\triangle PF_2F_0$ 中，$PH\perp F_0F_2$，$\angle F_2PH=\angle F_0PH$,

则 $|PF_2|=|PF_0|$ 且 H 为 F_2F_0 中点,

在 $\triangle F_1F_2F_0$ 中，$OH=\frac{1}{2}|F_1F_0|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_0|)$

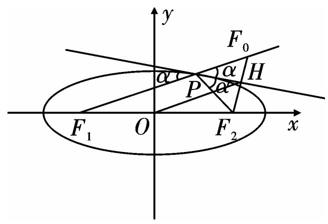

图 5

$=\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)$，

则 $|PF_1|+|PF_2|=4=2a$，$\therefore a=2$，$b^2=1$，

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………………（12 分）

法二：设 F_1，O 在 l 上的射影分别为 H_1，H_0，连接 PF_1，PF_2，OH，如图 6，

设 $\angle F_1PH_1=\alpha$，则 $\angle F_2PH=\alpha$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1H_1P$ 中，可得 $F_1H_1=PF_1\sin\alpha$，$PH_1=PF_1\cos\alpha$，

同理：$F_2H=PF_2\sin\alpha$，$PH=PF_2\cos\alpha$，

所以 $HH_1=H_1P+HP=(PF_1+PF_2)\cos\alpha=2a\cos\alpha$，

$OH_0=\dfrac{F_1H_1+F_2H}{2}=\dfrac{(PF_1+PF_2)\sin\alpha}{2}=a\sin\alpha$，

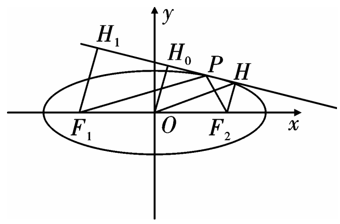

图 6

$OH^2=OH_0^2+H_0H^2=(a\sin\alpha)^2+\left(\dfrac{2a}{2}\cos\alpha\right)^2=a^2=4$，

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………………（12 分）

法三：设椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由（1）：$\dfrac{b^2}{a^2}=1-e^2=\dfrac{1}{4}$，即 $a^2=4b^2$，椭圆 C 的方程可化为 $x^2+4y^2=4b^2$，

设点 $P(x_0,\ y_0)(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0)$，直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y=kx+y_0-kx_0$，

代入 $x^2+4y^2=4b^2$ 得：$(4k^2+1)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4b^2=0$，

由 l 与 C 相切，$\therefore\Delta=64k^2(y_0-kx_0)^2-4(4k^2+1)[4(y_0-kx_0)^2-4b^2]=0$，

解得 $k=-\dfrac{x_0}{4y_0}$，

$\therefore$ 直线 l 方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{4y_0}(x-x_0)$，即 $x_0x+4y_0y=x_0^2+4y_0^2=4b^2$ ①，

过点 F_2 且与 l 垂直的直线为 $4y_0(x-c)-x_0y=0$，即 $4y_0x-x_0y=4\sqrt{3}by_0$ ②，

由①$\times x_0+$②$\times 4y_0$ 得：$(x_0^2+16y_0^2)x_H=4b^2x_0+16\sqrt{3}by_0^2$ ③，

由①$\times 4y_0-$②$\times x_0$ 得：$(x_0^2+16y_0^2)y_H=16b^2y_0-4\sqrt{3}bx_0y_0$ ④，

∵ H 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，∴$x_H^2+y_H^2=4$，

由③^2+④^2 得：$(x_0^2+16y_0^2)^2(x_H^2+y_H^2)=16b^2(bx_0+4\sqrt{3}y_0^2)^2+16b^2y_0^2(4b-\sqrt{3}x_0)^2$，

即 $(x_0^2+16y_0^2)^2=4b^2(b^2x_0^2+48y_0^4+3x_0^2y_0^2+16b^2y_0^2)$，

∵$x_0^2+4y_0^2=4b^2$，∴$(4b^2+12y_0^2)^2=4b^2[b^2(4b^2-4y_0^2)+48y_0^4+3(4b^2-4y_0^2)y_0^2+16b^2y_0^2]$，

化简得：$(b^2+3y_0^2)^2=b^2[b^4+6b^2y_0+9y_0^4]=b^2(b^2+3y_0)^2=(b^3+3by_0)^2$，

即 $b^2+3y_0^2=b^3+3by_0$ 或 $b^2+3y_0^2=-(b^3+3by_0)$ 对任意 $y_0\in(-b,0)\cup(0,b)$ 恒成立，

解得 $b=1$，所以椭圆方程为 $x^2+4y^2=4$．……………………………………………（12 分）