巴蜀中学2021届高考适应性月考卷（八）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	D	C	B	A	D

【解析】

1．$\log_3(2-x)\leqslant 1\Rightarrow A=[-1,\ 2)$，$|x-1|\leqslant 1\Rightarrow B=[0,\ 2]$，因为$A\not\subset B$，$B\not\subset A$，$\therefore x\in A$是$x\in B$的既不充分也不必要条件，故选D.

2．设$z=a+3a\mathrm{i}$，$a\in\mathbf{R}$，$a>0$，$\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}$，$\therefore a=1$，虚部为3，故选A.

3．四袋垃圾总共有$\mathrm{A}_4^4=24$种不同的情况，选出一袋投放正确$\mathrm{C}_4^1=4$，剩下3袋与对应垃圾桶全部错位排，共2种情况，$P=\dfrac{\mathrm{C}_4^1\times 2}{\mathrm{A}_4^4}=\dfrac{1}{3}$，故选C.

4．圆C：$(x-1)^2+(y+2)^2=25$，$r=5$，$C(1,\ -2)$到直线$3x+4y-10=0$的距离$d=\dfrac{|3-8-10|}{5}=3$，则弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=8$，设P到AB的距离为h，则$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=4$，解得$h=1$，而圆上$AB$两侧的动点到直线$AB$的最大距离分别为5和2，故满足条件的点$P$共4个，故选D.

5．$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=\dfrac{15}{4}$，$\therefore\overrightarrow{CP}$在$\overrightarrow{CB}$上的投影为$\dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{5}{4}$，故选C.

6．$f(x)=|x|+x\sin x(x\neq 0)$为偶函数，定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，排除AC选项；$x>0$时，$f(x)=x+x\sin x=x(1+\sin x)\geqslant 0$，图象横在$x$轴的上方，排除D选项；当$\sin x=-1$，$x=2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)=0$，故选B.

7．构造以PA，PB，PC为棱长的长方体，设该长方体的外接球球心为O，半径为R，则有$4R^2=9+16+25=50$，则$R^2=\dfrac{50}{4}$，在所有过点E的截面里，当截面过球心O时，截面圆的面积取最大值，此时半径为R；在所有过点E的截面里，当OE与截面垂直时，截面圆

的面积取最小值，此时截面圆的圆心为E，因为$OE=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{2}=\dfrac{5}{2}$，∴最小截面圆的半径为$r=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{\dfrac{50}{4}-\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$，∴最小截面圆的面积为$S=\pi r^2=\pi\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}\pi$，故截面圆的面积范围为$\left[\dfrac{25\pi}{4},\ \dfrac{25\pi}{2}\right]$，故选 A.

8．$f(x)$在$\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$上单调，所以$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{T}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}\Rightarrow 0<\omega\leqslant 3$，又$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，所以$\dfrac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，∴$\omega\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\omega=2+6k,\ k\in\mathbf{Z}$，所以$k=0,\ \omega=2$，当$x\in[0,\ t)$时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\ 2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\dfrac{\pi}{2}<2t+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{5}{6}\pi$或$2t+\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{3}{2}\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}<t\leqslant\dfrac{\pi}{3}$或$t>\dfrac{2\pi}{3}$，故选 D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分）

题号	9	10	11	12
答案	BC	BD	BCD	ABD

【解析】

9．A 选项错误；B 选项中阳转率高说明有高滴度的抗体，当感染新冠肺炎后，肺炎症状将会大大降低，进而减少重症率；C 选项中由保护率的计算公式可得：对照组和疫苗组的发病率分别为$1\%,\ 0.4\%$，代入可得保护率为60%；D 选项中虽然根据公式算出样本中疫苗组的发病率为10%，但实际是否会发病是随机事件，故选 BC.

10．对于 A 选项，$V_{D-APQ}=V_{P-ADQ}$，$\triangle ADQ$面积不定，而P到平面ADQ的距离为定值AB，故V_{D-APQ}不是定值；对于 B 选项，由于$PQ\,//$平面$A_1B_1C_1D_1$，则经过直线PQ的平面APQ与平面$A_1B_1C_1D_1$的所有交线均与直线PQ平行，根据平行的传递性，可得所有交线也平行；对于 C 选项，设正方体棱长为 1，$PB=DQ=a\in(0,\ 1)$，则$AP=AQ=\sqrt{a^2+1}$，$PQ=\sqrt{2}$，则$\cos\angle PAQ=\dfrac{a^2+1+a^2+1-2}{2(a^2+1)}=\dfrac{a^2}{a^2+1}=1-\dfrac{1}{a^2+1}\in\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，则$\angle PAQ\in\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，错误；对于 D 选项，易得直线$PQ$与平面$A_1C_1CA$垂直，故平面$APQ\perp$平面$A_1C_1CA$，故选 BD.

11．A 选项中，由指数函数的图象可知，$0<a<b$ 或者 $b<a<0$，所以错误，所以 B 正确；C 选项中，函数 $y=\frac{x}{1+x}=1+\frac{-1}{1+x}$ 在 $(-1,\ +\infty)$ 上单增，而 $|a|<|b|$，所以正确；或者也可以将 B 选项等价转化为证明 $|a|<|b|$ 是正确的；D 选项中，$0<a<\log_3 2\Rightarrow 0<a<b<1$，则有 $a^b<a^a<b^a$，所以正确，故选 BCD.

12．由 $g(m)=f(n)$，令 $e^{m-k}=\ln\frac{n}{k}+\frac{1}{k}=t>0$，则 $m=\ln t+k,\ n=ke^{t-\frac{1}{k}}$，所以 $n-m=ke^{t-\frac{1}{k}}-\ln t-k$，记函数 $h(t)=ke^{t-\frac{1}{k}}-\ln t-k,\ t>0$，则 $h'(t)=ke^{t-\frac{1}{k}}-\frac{1}{t}$，显然 $h'(t)$ 单调递增，且 $h'\left(\frac{1}{k}\right)=0$，故 $h(t)$ 在 $\left(0,\ \frac{1}{k}\right)\downarrow$，$\left(\frac{1}{k},\ +\infty\right)\uparrow$，即 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{1}{k}\right)=-\ln\frac{1}{k}=\ln k$，①当 $k>1$ 时，$\ln k>0$，所以 $(n-m)_{\min}=\ln k>0$，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的横向距为 $\ln k$；②当 $0<k\leqslant 1$ 时，$\ln k\leqslant 0$，所以 $(n-m)_{\min}=\ln k\leqslant 0$，所以 $|n-m|_{\min}=0$，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的横向距为 0，故选 ABD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	10	$\sqrt{3}$	$40\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}$，$\sqrt{7}$

【解析】

13．$C_5^2=10$.

14．由数列性质知 $a_2a_7a_{12}=a_7^3=3\sqrt{3}$，得 $a_7=\sqrt{3}$，又 $b_1+b_7+b_{13}=3b_7=6\pi$，得 $b_7=2\pi$，又 $b_2+b_{12}=2b_7=4\pi$，$a_3a_{11}=a_7^2=3$，所以 $\tan\frac{b_2+b_{12}}{a_3a_{11}}=\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

15．由题意知 $\angle CBD=45°$，由正弦定理 $\frac{40}{\sin 45°}=\frac{BC}{\sin 60°}$，得 $BC=20\sqrt{6}$，所以 $CA=40\sqrt{2}$.

16．过 M 作 $MN\,//\,PF_2$ 交 PF_1 于点 N，作 $MG\,//\,PF_1$ 交 PF_2 于点 G，由 $\overrightarrow{PM}=\frac{4}{7}\overrightarrow{PD}+\frac{3}{7}\overrightarrow{PF_2}$，得 $\frac{DM}{MF_2}=\frac{DN}{NP}=\frac{3}{4}$，由角平分线定理 $\frac{PD}{PF_2}=\frac{DM}{MF_2}=\frac{3}{4}$，因为 D 为 PF_1 的中点，所以 $\frac{PF_1}{PF_2}=\frac{6}{4}$，由双曲线的定义，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $PF_1=6a,\ PF_2=4a$，$F_1F_2=2c$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理 $\cos 60°=\frac{36a^2+16a^2-4c^2}{2\times 6a\times 4a}\Rightarrow e=\sqrt{7}$.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）选条件①：

由题知 $b\cos C+c\cos B=2a\cos B$，

$\therefore 2R\sin B\cos C+2R\sin C\bullet\cos B=2\bullet 2R\bullet\sin A\bullet\cos B$，

$\therefore \sin(B+C)=2\sin A\cos B$，

$\therefore \sin A=2\sin A\cos B$，又 $0<A<\pi$，则 $\sin A>0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$．…………………………………………………（5 分）

选条件②：

由题知 $2R\sin A+4R\sin B\cos A=4R\sin C$，

$\therefore \sin A+2\sin B\cos A=2\sin C$，又 $C=\pi-(A+B)$，

$\therefore \sin A+2\sin B\cos A=2\sin(A+B)$，

$\therefore \sin A=2\sin A\cos B$，又 $0<A<\pi$，则 $\sin A>0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$．…………………………………………………（5 分）

选条件③：

由题知 $2R\sin A+2R\sin C-2R\sin B(\sqrt{3}\sin C+\cos C)=0$，

$\therefore \sin(B+C)-\sin B\cos C+\sin C-\sqrt{3}\sin B\sin C=0$，

$\therefore \cos B\sin C+\sin C-\sqrt{3}\sin B\sin C=0$，又 $0<C<\pi$，则 $\sin C>0$，

$\therefore \cos B+1-\sqrt{3}\sin B=0$，

$\therefore 2\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，又 $-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………………………………（5 分）

（2）由正弦定理知 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\therefore b=2R\sin B=2\sqrt{3}$，

又 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$\therefore 12=a^2+c^2-ac$,

$\therefore 12=(a+c)^2-3ac$，

$\therefore (a+c)^2-12=3ac\leqslant 3\cdot\dfrac{(a+c)^2}{4}$,

$\therefore (a+c)^2\leqslant 48$，

$\therefore a+c\leqslant 4\sqrt{3}$（当且仅当$a=c=2\sqrt{3}$时取等号），

$\therefore a+c$的最大值为$4\sqrt{3}$.……………………………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题知$4S_n=a_{n+1}\cdot a_n(n\in\mathbf{N}^*)$①，又$a_1=2$，

$\therefore 4S_1=a_1\cdot a_2$，$\therefore a_2=4$，

又$4S_2=a_2\cdot a_3$，$\therefore a_3=6$，

又 $4\,S_3=a_3a_4$，$\therefore a_4=8$，

由①知：$n\geqslant 2$时，$4S_{n-1}=a_n\cdot a_{n-1}$②，

①−②：$4(S_n-S_{n-1})=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，

又$a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_{n-1}=4(n\geqslant 2)$，

$\therefore$对于数列$\{a_n\}$来说，a_1，a_3，a_5，$\cdots$成等差数列，a_2，a_4，a_6，$\cdots$成等差数列，

（ⅰ）当n为奇数时，$a_n=a_1+\dfrac{n-1}{2}\times 4=2n$，

（ⅱ）当n为偶数时，$a_n=a_2+\dfrac{n-2}{2}\times 4=2n$，

$\therefore n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n=2n$.……………………………………………………………………（8 分）

（2）$\dfrac{1}{2a_n(a_n-n+1)}=\dfrac{1}{4n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

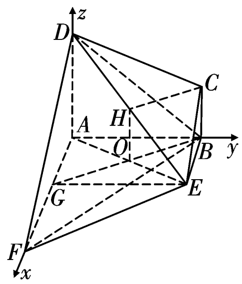
$\therefore T_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$.………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图，连接 AE 交 BG 于点 O，取 DE 中点为 H，连接 HO，HC，GE，

在四边形 $ABEG$ 中，AG // BE，$AG = BE$，

故四边形 $ABEG$ 为平行四边形，



故 O 为 AE 中点，

所以在△ADE 中，OH 为中位线，

则 OH // AD 且 $OH = \dfrac{1}{2}AD$，

又 BC // AD 且 $BC = \dfrac{1}{2}AD$，

故 OH // BC 且 $OH = BC$，

即四边形 $BCHO$ 为平行四边形，

所以 HC // OB，

又∵$HC \subset$ 平面 DCE，$OB \not\subset$ 平面 DCE，

∴OB// 平面 DCE，即 BG// 平面 DCE.……………………………………………………（5 分）

（2）解：$\left.\begin{array}{l}\because 平面ABCD \perp 平面ABEF,\\ 平面ABCD \cap 平面ABEF = AB,\\ AD \perp AB,\\ AD \subseteq 平面ABCD\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp 平面ABEF$，

如图，以点 A 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为 x，y，z 轴正方向建立坐标系，

设 $AF = a(a > 0且a \neq 1)$，

则 $F(a,0,0)$，$B(0,2,0)$，$D(0,0,2)$，$E(1,2,0)$，$C(0,2,1)$，

则 $\overrightarrow{DC} = (0,2,-1)$，$\overrightarrow{DE} = (1,2,-2)$，$\overrightarrow{BF} = (a,-2,0)$，

设平面 DCE 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n} = 2y - z = 0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{n} = x + 2y - 2z = 0,\end{cases}$ 取 $\vec{n} = (2,1,2)$，

所以直线 BF 与平面 DCE 所成角 α 满足 $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{|2a-2|}{3\times\sqrt{a^2+4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

即 $11a^2 - 40a - 16 = 0$，解得 $a = 4$ 或 $a = -\dfrac{4}{11}$（舍），

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{m} = (x',y',z')$，

$\because \overrightarrow{BF}=(4,\ -2,\ 0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,\ -2,\ 2)$，

$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{BF}\cdot\vec{m}=4x'-2y'=0, \\ \overrightarrow{BD}\cdot\vec{m}=-2y'+2z'=0, \end{cases}$ 取 $\vec{m}=(1,\ 2,\ 2)$，

所以平面 BDF 与平面 DCE 所成锐二面角 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{8}{3\times3}=\dfrac{8}{9}$.

……………………………………………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）果径 $[65,\ 80)$ 的频率为 $(0.013+0.030+0.045)\times5=0.44<0.5$，

果径 $[65,\ 85)$ 的频率为 $(0.013+0.030+0.045+0.060)\times5=0.74>0.5$，

故果径的中位数在 $[80,\ 85)$，不妨设为 a，则 $(a-80)\times0.060=0.5-0.44=0.06$，

解得中位数 $a=81$. ……………………………………………………………………（3 分）

（2）果径 $[70,\ 75)$，$[75,\ 80)$，$[80,\ 85)$ 的频率之比为 (0.03×5) ∶ (0.045×5) ∶ $(0.06\times5)=$ 2∶3∶4，

所以分层抽样过程中，一级果、二级果、三级果个数分别为 4，3，2 个，

故随机变量 $X=0,1,2,3$，

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84},$$

$$P(X=1)=\frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{40}{84},$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^1C_4^2}{C_9^3}=\frac{30}{84},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

期望 $E(X)=0\times\dfrac{10}{84}+1\times\dfrac{40}{84}+2\times\dfrac{30}{84}+3\times\dfrac{4}{84}=\dfrac{112}{84}=\dfrac{4}{3}$. ……………………………（7 分）

（3）这批果实中一级果的概率 $P=\dfrac{3}{10}$，每个果实相互独立，则 $Y\sim B\left(100,\ \dfrac{3}{10}\right)$，

则 $P(Y=k)=C_{100}^{k}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{k}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{100-k}$，题目即求 k 为何值时，$P(Y=k)$ 最大，

令 $\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)}=\frac{C_{100}^{k+1}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{99-k}}{C_{100}^{k}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{k}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{100-k}}=\frac{3(100-k)}{7(k+1)}>1$，解得 $k<29.3$，

故当 $k\leqslant 29$ 时，$P(Y=k+1)>P(Y=k)$，即 $P(Y=30)>P(Y=29)>P(Y=28)>P(Y=27)$ $>\cdots$，当 $k\geqslant 30$ 时，$P(Y=k+1)<P(Y=k)$，即 $P(Y=30)>P(Y=31)>P(Y=32)>P(Y=33)$ $>\cdots$，所以 $P(Y=k)_{\max}=P(Y=30)$，

即一级果的个数最有可能为 30 个. ……………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

证明：（1）∵$f(x)=\ln(x+1)-a\left(x+\frac{x}{x+1}\right)$，$a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $f(0)=0$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a\left[1+\frac{1}{(x+1)^2}\right]=-a\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-a$，

令 $t=\frac{1}{x+1}\in(0,1)$，

则由 $f'(x)=0$，可得 $-a\cdot t^2+t-a=0$，

∵$a\geqslant\frac{1}{2}$，

∴$\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，

则 $f'(x)\leqslant 0$，在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

∴$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

则 $f(x)<f(0)=0$. ……………………………………………………………（6 分）

（2）由（1）知，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\ln(x+1)<\frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$，取 $x=\frac{1}{n}$，

则 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)<\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)=\frac{1}{2n}\left(1+\frac{n}{n+1}\right)$，

∴$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore \ln(n+2)-\ln(n+1)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$，

$\therefore \ln(n+3)-\ln(n+2)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}\right)$，

$\cdots$，

$\therefore \ln(2n)-\ln(2n-1)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)$，

上式全部相加，则有 $\ln(2n)-\ln n<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}+\cdots+\dfrac{2}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)$，

则 $\ln 2<\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{4n}=S_{2n}-S_n+\dfrac{a_n}{4}$，证毕.……………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）证明：设直线 OA 的斜率为 $k_1(k_1>0)$，直线 OB 的斜率为 k_2，

由题可知，直线 l 的斜率不为 0，

设直线 l：$x=ty+\dfrac{p}{2}$，

则由 $\begin{cases} x=ty+\dfrac{p}{2}, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 可得 $y^2-2pty-p^2=0$，

易知 $\Delta>0$，且 $y_1y_2=-p^2$，

又 $x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\bullet\dfrac{y_2^2}{2p}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\dfrac{p^2}{4}$，则 $k_1\bullet k_2=\dfrac{y_1}{x_1}\bullet\dfrac{y_2}{x_2}=-p^2\bullet\dfrac{4}{p^2}=-4$．

……………………………………………………………………………………………（3 分）

（2）解：设 $C(x_c,\ y_c)$，$D(x_d,\ y_d)$，

由（1）可知，l_{OA}：$y=k_1x$，l_{OB}：$y=k_2x=-\dfrac{4}{k_1}x$，

联立方程 $\begin{cases} y=k_1x, \\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 可得 $x_c^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2k_1^2+a^2}$，

用 $-\dfrac{4}{k_1}$ 替换式子中的 k_1，有 $x_d^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2\left(-\dfrac{4}{k_1}\right)^2+a^2}=\dfrac{a^2b^2k_1^2}{a^2k_1^2+16b^2}$，

$$OC^2+OD^2=x_c^2+y_c^2+x_d^2+y_d^2=x_c^2+\left(1-\frac{x_c^2}{b^2}\right)\cdot a^2+x_d^2+\left(1-\frac{x_d^2}{b^2}\right)\cdot a^2$$

$$=2a^2+\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)(x_c^2+x_d^2)$$

$$=2a^2+\frac{b^2-a^2}{b^2}\left(\frac{a^2b^2}{b^2k_1^2+a^2}+\frac{a^2b^2k_1^2}{a^2k_1^2+16b^2}\right)$$

$$=2a^2+\frac{b^2-a^2}{b^2}\cdot\frac{a^2b^4k_1^4+2a^4b^2k_1^2+16a^2b^4}{a^2b^2k_1^4+(a^4+16b^4)k_1^2+16a^2b^2},$$

又 $OC^2+OD^2=5$，则 $\dfrac{2a^4b^2}{a^4+16b^4}=b^2$，且 $2a^2+\dfrac{b^2-a^2}{b^2}\cdot b^2=5$，

即 $a^2+b^2=5$，$\therefore\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$

此时椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$．……………………………………………………………（7 分）

（3）解：$\because\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCD}}=\dfrac{\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}|OC||OD|\sin\angle COD}=\dfrac{|OA||OB|}{|OC||OD|}=\dfrac{x_1}{|x_c|}\cdot\dfrac{x_2}{|x_d|}=\dfrac{x_1x_2}{x_cx_d}$,

由（2）可知，当 $a^2=4,\ b^2=1$ 时，

$x_c^2=\dfrac{4}{k_1^2+4}$，$x_d^2=\dfrac{k_1^2}{k_1^2+4}$，则 $x_cx_d=\dfrac{2|k_1|}{k_1^2+4}$，

又由（1）可知 $x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$，$\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCD}}=\dfrac{x_1x_2}{x_cx_d}=\dfrac{\frac{p^2}{4}}{\frac{2|k_1|}{k_1^2+4}}=\dfrac{p^2}{8}\left(k_1+\dfrac{4}{k_1}\right)\geqslant\dfrac{p^2}{2}$，

当且仅当 $k_1=2$ 时等号成立，

由题意 $\dfrac{p^2}{2}=1$，$p=\sqrt{2}$，此时抛物线方程为 $y^2=2\sqrt{2}x$．…………………………（12 分）