

巴蜀中学 2021 届高三适应性月考卷（七）

数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知 $A = \left\{ x \mid \frac{1}{x} \leq 1 \right\}$, $B = \{ y \mid y = e^x \}$, 则 $A \cap_{\mathbb{R}} B =$
 - A. $(-\infty, 0)$
 - B. $(0, 1]$
 - C. $[1, +\infty)$
 - D. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$
2. 复数都可以表示为 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$), 其中 $|z|$ 为 z 的模, θ 称为 z 的辐角. 已知复数 z 满足 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$, 则 z 的辐角为
 - A. $\frac{\pi}{4}$
 - B. $\frac{3\pi}{4}$
 - C. $\frac{5\pi}{4}$
 - D. $\frac{7\pi}{4}$
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和. 若 $S_{2023} = 2023$, 且 $\frac{S_{2021}}{2021} - \frac{S_{20}}{20} = 2001$, 则 a_1 等于
 - A. -2021
 - B. -2020
 - C. -2019
 - D. -2018
4. 已知 $a > b > e$, $x = a + b \ln b$, $y = b + a \ln a$, $z = b + a \ln b$, 则 x, y, z 的大小关系为
 - A. $y < z < x$
 - B. $z < x < y$
 - C. $z < y < x$
 - D. $x < z < y$
5. 若圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ 与直线 $l: y = kx + 2$ ($k > 0$) 相交于点 A, B , 且 $\angle ACB = 120^\circ$, 则 k 的值为
 - A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - B. 1
 - C. $\sqrt{3}$
 - D. 2
6. 某弹簧振子做简谐振动, 其位移函数为 $y = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$), 其中 t 表示振动的时间, y 表示振动的位移, 当 $t \in [0, 2]$ 时, 该振子刚好经过平衡位置（平衡位置即位移为 0 的位置）5 次, 则在该过程中该振子有 () 次离平衡位置的距离最远.
 - A. 3
 - B. 2
 - C. 5
 - D. 5 或 6

7. 动点 M 分别与两定点 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ 连线的斜率的乘积为 $-\frac{3}{4}$, 设点 M 的轨迹为曲线 C , 已知

$N(1, \sqrt{3})$, $F(-2, 0)$, 则 $|MF| + |MN|$ 的最小值为

- A. 2 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. 10

8. 随机变量 X 的概率分布列如下:

X	0	1	2	...	k	...	12
P	$\frac{1}{a}$	$\frac{12}{a}$	$\frac{1}{a}C_{12}^2$	...	$\frac{1}{a}C_{12}^k$	...	$\frac{1}{a}$

其中 $k=0, 1, 2, \dots, 12$, 则 $E(X)=$

- A. 2^{12} B. 2^6
C. 6 D. 12

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 已知函数 $f(x) = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 2$, 定义域为 M , 值域为 $[1, 2]$, 则下列说法中一定正确的是

- A. $M = [0, \log_3 2]$ B. $M \subseteq (-\infty, \log_3 2]$
C. $\log_3 2 \in M$ D. $0 \in M$

10. 下列命题中正确的是

- A. $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ 是 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线的充分条件
B. 若 $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, 则 $AB \parallel CD$
C. A, B, C 三点不共线, 对空间任意一点 O , 若 $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$, 则 P, A, B, C 四点共面
D. 若 P, A, B, C 为空间四点, 且有 $\vec{PA} = \lambda\vec{PB} + \mu\vec{PC}$ ($\vec{PB}, \vec{PC}$ 不共线), 则 $\lambda + \mu = 1$ 是 A, B, C 三点共线的充分不必要条件

11. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 有公共焦点 F_1, F_2 , 且两条曲线

在第一象限的交点为 P , 若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形, C_1, C_2 的离心率分别为 e_1 和 e_2 , 则

- A. $a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ B. $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = 2$
C. $e_2 - e_1 = 2$ D. $e_1 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

12. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) - f(x) = x \ln x$, 且 $f(e) = e$, 其中 e 是自然对数的底数, 则下列结论正确的是

- A. $f(x) > 0$
B. 若 $f(x) + x > 2e$, 则 $x \in (e, +\infty)$
C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

D. 任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{8}{17}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____.

14. 对如下编号为1, 2, 3, 4的四个格子涂色, 有红、黄、蓝、绿四种颜色可供选择, 要求相邻格子不同色, 则在1号格子涂红色的条件下, 4号格子也涂红色的概率是_____.

1	2	3	4
---	---	---	---

15. 已知对满足 $4x+4y+5=4xy$ 的任意正实数 x, y , 都有 $x^2+2xy+y^2-ax-ay+1 \geq 0$, 则整数 a 的最大值为_____.

16. 点 P 是棱长为4的正四面体 $S-ABC$ 表面上的动点, 该四面体的外接球的半径是_____; 若 MN 是该正四面体外接球的一条直径, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值是_____. (第一空2分, 第二空3分)

四、解答题（共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤）

17. (本小题满分10分)

已知: 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 若 a_4, a_3, a_5 依次构成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 的值;

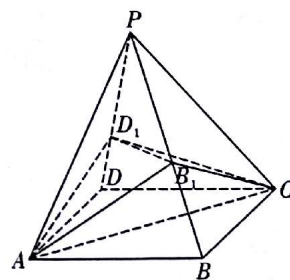
(2) 若 $a_1 > 0, q > 0$, 求证: $2\ln S_4 > \ln S_3 + \ln S_5$.

18. (本小题满分12分)

已知: 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=AB=4$, B_1, D_1 分别是棱 PB 和 PD 的中点.

(1) 求证: $AC \perp PD$;

(2) 求三棱锥 $A-B_1CD_1$ 和四棱锥 $P-ABCD$ 的体积之比.



19. (本小题满分12分)

已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$, 边 $BC = 2$, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求边 AC 的长度;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1, B_1, C_1 , 求 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积.

20. (本小题满分 12 分)

已知: 抛物线 $C: y = ax^2 (a > 0)$ 被直线 $y = 2x - 1$ 截得的弦长 $|AB| = 4\sqrt{15}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 定义: 过抛物线上一点, 垂直于在该点的切线的直线称为抛物线的法线 n . 若抛物线上有一动点 $P(x_0, y_0)$ (其中 $x_0 \neq 0$), 点 F 为抛物线的焦点, 求证: PF 关于法线 n 的对称直线 PQ 垂直于 x 轴.

21. (本小题满分 12 分)

已知: 函数 $f(x) = a \ln x + x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a = -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x} - x^a$, 且 $g(x) \geq 0$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 时恒成立, 求实数 a 的最小值.

22. (本小题满分 12 分)

某公司为获得一款产品的质量认证, 需要去检测机构检验产品是否含有有害物质 T , 在检验中如果样品含有物质 T , 称结果为阳性, 否则为阴性. 现有 $n (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ 份样本需要检验. 有以下两种检验方案, 方案甲: 逐份检验, 则需要检验 n 次; 方案乙: 混合检验, 将 n 份样本分别取样混合在一起检验一次, 若检验结果为阴性, 检验的次数共为 1 次; 若检验结果为阳性, 为了确定样本中的阳性样本, 则对 n 份样本再逐一检验, 即检验的次数共为 $n+1$ 次. 每份样本是否为阳性是相互独立的, 且据统计每份样本是阳性的概率为 $p (0 < p < 1)$.

(1) 若 $n (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ 份样本采用方案乙, 设需要检验的总次数为 X , 求 X 的分布列及数学期望;

(2) 若两种检验方案中, 每一次检验费用都是 $a (a > 0)$ 元, 且 n 份样本混合检验一次需要额外收 $2.5a$ 元的材料费, 单独一个样本检验不需要材料费. 假设在接受检验的样本中, $p = 1 - e^{-\frac{1}{10}}$, 要使得采用方案乙总费用的数学期望低于方案甲, 求 n 的最大值.

参考数据: $e^{-1} \approx 0.368$, $e^{-1.1} \approx 0.333$, $e^{-1.2} \approx 0.301$, $e^{-1.3} \approx 0.273$, $e^{-1.4} \approx 0.247$.