巴蜀中学2021届高考适应性月考卷（七）

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	D	B	D	B	C

【解析】

1．$A=(-\infty,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$，$B=(0,\ +\infty)$，所以$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,\ 0)$，故选A.

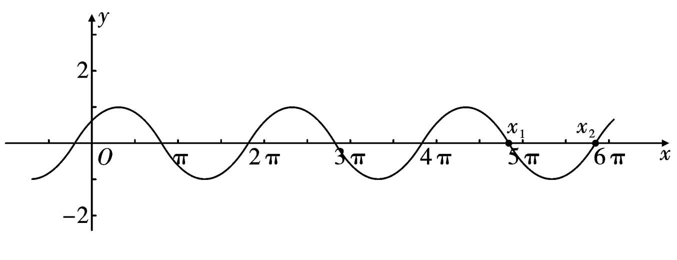
2．由$\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{z}=1+\mathrm{i}$，得$z=-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$，所以$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$，故选C.

3．因为S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，令$b_n=\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$，则$\{b_n\}$也为等差数列，设其公差为$d'$，由$b_{2021}-b_{20}=\dfrac{S_{2021}}{2021}-\dfrac{S_{20}}{20}=2001$，得$d'=1$，又$b_{2023}=\dfrac{S_{2023}}{2023}=1$，得$b_1=a_1=\dfrac{S_1}{1}=b_{2023}-2022d'$ $=1-2022=-2021$，故选A.

4．$y-z=a(\ln a-\ln b)>0$，$\therefore y>z$；$x-z=a-b+(b-a)\ln b=(a-b)(1-\ln b)<0$，$\therefore x<z$，所以$x<z<y$，故选D.

5．C：$(x+1)^2+(y-2)^2=2$，圆心$C(-1,\ 2)$，半径为$r=\sqrt{2}$，所以$|CA|=|CB|=\sqrt{2}$，又$\angle ACB=120°$，所以C到直线l的距离为$d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即$d=\dfrac{|-k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$k=1$，故选B.

6．根据题意，画出草图，由图可知$2\in[x_1,\ x_2)$，$t\in[0,\ 2]$时，位移取到极大、极小值共5或6次，故选D.



7. 设 $M(x,y)$，则 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\dfrac{y}{x+4}\cdot\dfrac{y}{x-4}=\dfrac{y^2}{x^2-16}=-\dfrac{3}{4}$，即 C：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1(x\neq\pm4)$，$F(-2,0)$ 为 C 的左焦点，设 C 的右焦点为 $F'(2,0)$，则 $|MF|+|MF'|=8$，从而 $|MF|+|MN|=8-|MF'|+|MN|\geqslant 8-|NF'|=8-\sqrt{(1-2)^2+(\sqrt{3})^2}=6$，当 M，N，F' 共线，且 N 在线段 MF' 上时取等号，故选 B.

8．由分布列的归一性：$\dfrac{1}{a}(\mathrm{C}_{12}^0+\mathrm{C}_{12}^1+\cdots+\mathrm{C}_{12}^k+\cdots+\mathrm{C}_{12}^{12})=\dfrac{2^{12}}{a}=1$，得 $a=2^{12}$，$E(X)=\dfrac{1}{2^{12}}\cdot(0\cdot\mathrm{C}_{12}^0+1\cdot\mathrm{C}_{12}^1+2\mathrm{C}_{12}^2+\cdots+k\mathrm{C}_{12}^k+\cdots+12\mathrm{C}_{12}^{12})$ ①，$E(X)=\dfrac{1}{2^{12}}[12\cdot\mathrm{C}_{12}^{12}+11\cdot\mathrm{C}_{12}^{11}+10\mathrm{C}_{12}^{10}+\cdots+(12-k)\mathrm{C}_{12}^{12-k}+\cdots+0\mathrm{C}_{12}^0]=\dfrac{1}{2^{12}}[12\cdot\mathrm{C}_{12}^0+11\cdot\mathrm{C}_{12}^1+10\mathrm{C}_{12}^2+\cdots+(12-k)\mathrm{C}_{12}^k+\cdots+0\mathrm{C}_{12}^{12}]$ ②，由①+②得 $2E(X)=\dfrac{12}{2^{12}}(\mathrm{C}_{12}^0+\mathrm{C}_{12}^1+\mathrm{C}_{12}^2+\cdots+\mathrm{C}_{12}^k+\cdots+\mathrm{C}_{12}^{12})=\dfrac{12}{2^{12}}\cdot2^{12}=12$，所以 $E(X)=6$，故选 C.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分）

题号	9	10	11	12
答案	BCD	AC	AD	ABC

【解析】

9．令 $t=3^x(t>0)$，则 $f(x)=t^{2x}-2\cdot t+2=t^2-2\cdot t+2=(t-1)^2+1=g(t)$，由 $g(t)=1$，得 $t=1$，即 $3^x=1$，得 $x=0$；由 $g(t)=2$，得 $t=0(舍)或2$，即 $x=\log_3 2$；根据 $g(t)$ 的图象特征，知 $0\in M$，$\log_3 2\in M$，$M\subseteq(-\infty,\log_3 2]$，故选 BCD.

10．由 $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，可得向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的方向相同，此时向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共线，所以 A 正确；若 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，则 $AB\parallel CD$ 或 A，B，C，D 四点共线，所以 B 不正确；由 A，B，C 三点不共线，对空间任意一点 O，若 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，则 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right)+\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right)$，即 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，有 P，A，B，C 四点共面，故 C 正确；若 P，A，B，C

为空间四点，且有$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}+\mu\overrightarrow{PC}$（$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$不共线），当$\lambda+\mu=1$时，即$\mu=1-\lambda$，可得$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=\lambda(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC})$，即$\overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CB}$，所以$A$，$B$，$C$三点共线，反之也成立，即$\lambda+\mu=1$是$A$，$B$，$C$三点共线的充要条件，所以D不正确，故选AC.

11．设C_1，C_2的焦距为$2c$，由C_1，C_2共焦点知$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2=c^2$，故A正确；$\triangle PF_1F_2$是以$PF_1$为底边的等腰三角形知$|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，由$P$在第一象限知：$|PF_1|=2a_1-|PF_2|=2a_2+|PF_2|$，即$2a_1-2c=2a_2+2c$，即$a_1-a_2=2c$，即$\dfrac{1}{e_1}-\dfrac{1}{e_2}=2$，故B，C错；由$\dfrac{1}{e_1}-\dfrac{1}{e_2}=2$，得$\dfrac{1}{e_1}=2+\dfrac{1}{e_2}$，又$e_2>1$，得$0<\dfrac{1}{e_2}<1$，所以$2<\dfrac{1}{e_1}<3$，从而$e_1\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$，故D正确，故选AD.

12．由$xf'(x)-f(x)=x\ln x$，得$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}$，即$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)'$，从而得$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$（其中$C$为常数），即$f(x)=\dfrac{1}{2}x\ln^2 x+Cx$，由$f(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}}{2}+C\mathrm{e}=\mathrm{e}$，得$C=\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)=\dfrac{1}{2}x\ln^2 x+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}x(\ln^2 x+1)>0$，故A正确；又$f'(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x+1)^2\geqslant 0$，从而$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故C正确；令$g(x)=f(x)+x$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上递增，不等式$f(x)+x>2\mathrm{e}\Leftrightarrow g(x)>g(\mathrm{e})$，得$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，故B正确；由$f''(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$得，当$x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$时，$f''(x)<0$；当$x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$时，$f''(x)>0$，所以$f(x)$的图象在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$部分上凸，在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$部分下凸，故D不正确，故选ABC.

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	$-\dfrac{161}{289}$	$\dfrac{2}{9}$	5	$\sqrt{6}$，$-\dfrac{16}{3}$

【解析】

13．由$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{8}{17}$，得$\cos\alpha=\dfrac{8}{17}$，从而$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\dfrac{161}{289}$.

14．若 1 号格子涂红色则 2 号格子有 C_3^1 种涂法，3 号格子与 2 号格子不同色有 C_3^1 种涂法，4 号格子与 3 号格子不同色有 C_3^1 种涂法，共有 $\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^1=27$ 种；若 1 号格子和 4 号格子都涂红色，则 3 号格子不涂红色，有 C_3^1 种，2 号格子不涂红色且不与 3 号格子同色有 C_2^1 种涂法，共有 $\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^1=6$ 种；故所求概率为 $P=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$.

15．由 $4x+4y+5=4xy$，得 $4x+4y+5=4xy\leqslant(x+y)^2$，解得 $x+y\geqslant5$ 或 $x+y\leqslant-1$（舍）；不等式 $x^2+2xy+y^2-ax-ay+1\geqslant0\Leftrightarrow a\leqslant x+y+\dfrac{1}{x+y}$ 恒成立，令 $t=x+y(t\geqslant5)$，则由 $z=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $t\in[5,+\infty)$ 上单调递增，当 $t=5$ 时，$z_{\min}=5\dfrac{1}{5}$，所以 $a\leqslant5\dfrac{1}{5}$，又 $a\in\mathbf{Z}$，从而 $a_{\max}=5$.

16．设正四面体 $S-ABC$ 的外接球球心为 O，外接球半径为 R，内切球半径为 r，且 $SH\perp$ 平面 ABC 于 H，则 $AH=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$SH=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$；由 $\begin{cases}SH=R+r=\dfrac{4\sqrt{6}}{3},\\ AH=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}R=\sqrt{6},\\ r=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\end{cases}$

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM})=|\overrightarrow{PO}|^2-|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{PO}|^2-R^2$ $\geqslant r^2-R^2=-\dfrac{16}{3}$，当 P 为该正四面体的内切球与各面的切点时取等号.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

（1）解：由条件，$2a_3=a_4+a_5$，即 $2a_1q^2=a_1q^3+a_1q^4$，由于 $a_1q^2\neq0$，

所以 $q^2+q-2=0$，解得 $q=1$ 或 $q=-2$．……………………………………………………（4 分）

（2）证明：由已知，$a_1>0$，$q>0$，即证：$S_4^2>S_3S_5$．

当 $q=1$ 时，显然成立；

当 $q\neq1$ 时，由公式，$S_4^2-S_3S_5=\left(\dfrac{a_1}{q-1}\right)^2(q^4-1)^2-\left(\dfrac{a_1}{q-1}\right)^2(q^3-1)(q^5-1)$，得 $q^3(q-1)^2$，

由 $q>0$，所以 $q^3(q-1)^2>0$，得证．…………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：连接 BD，和 AC 交于点 O，

在正方形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，连接 PO，

由 $PA=PC$，可得 $PO\perp AC$,

由 $PO\cap BD=O$，所以 $AC\perp$ 平面PBD，

而 $PD\subset$ 平面PBD，则有 $AC\perp PD$． ……………………………………………………（6 分）

（2）解：由（1）可知 $PO\perp AC$ 且 $PO\perp BD$，所以 PO 垂直于底面.

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}PO\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BD$，$V_{A-B_1CD_1}=\frac{1}{3}AC\cdot S_{\triangle OB_1D_1}=\frac{1}{3}AC\cdot\frac{1}{2}B_1D_1\cdot h$，

而 $B_1D_1=\frac{1}{2}BD$，$h=\frac{1}{2}PO$,

所以 $V_{A-B_1CD_1}=\frac{1}{3}AC\cdot\frac{1}{4}BD\cdot\frac{1}{2}PO$，则有 $V_{A-B_1CD_1}:V_{P-ABCD}=1:4$. ………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CB\sin\angle ABC$，得 $AB=\sqrt{3}$，

由余弦定理可得 $AC=1$． ……………………………………………………………………（4 分）

（2）由圆的周角定理可知：$\angle B_1A_1A=\angle B_1BA=\frac{\angle B}{2}$，$\angle C_1A_1A=\angle C_1CA=\frac{\angle C}{2}$，

则 $\angle A_1=\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle B}{2}$，同理：$\angle B_1=\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle A}{2}$，$\angle C_1=\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle A}{2}$.

由（1）知，$\triangle ABC$ 为直角三角形，其外接圆 $2r=BC=2$，$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆为同一圆，

所以 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=2r^2\sin\angle A_1\sin\angle B_1\sin\angle C_1=2\sin\frac{\angle B+\angle C}{2}\sin\frac{\angle C+\angle A}{2}\sin\frac{\angle B+\angle A}{2}$

$=2\cos\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}=2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$． ……………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）解：将直线与抛物线方程联立有：$ax^2-2x+1=0$，

则 $4\sqrt{15}=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{4-4a}}{a}$，解得 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a=-\frac{1}{3}$,

由于 $a>0$，所以 $a=\frac{1}{4}$． ……………………………………………………………………（5 分）

（2）证明：由抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 进行求导，得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线斜率为 $\frac{x_0}{2}$，

所以点 P 处的法线 n 的方程为 $y-y_0=\frac{-2}{x_0}(x-x_0)$，焦点 $F(0, 1)$，设 $Q(x', y')$，

则 $\begin{cases}\dfrac{y'-1}{x'}=\dfrac{x_0}{2},\\ \dfrac{y'+1}{2}-y_0=\dfrac{-2}{x_0}\left(\dfrac{x'}{2}-x_0\right),\end{cases}$ 由 1 式可得 $y'+1=2+\frac{x_0}{2}x'$，且 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2$，

代入 2 式可知：$\frac{x_0}{4}x'+1-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{-1}{x_0}x'+2$，可求得 $x'=x_0$，即 $PQ\perp x$ 轴.

……………………………………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $f'(x)=-\frac{1}{x}+1$，可得 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 1)$，$f(x)$ 的单调增区间为 $(1, +\infty)$.

……………………………………………………………………………………（4 分）

（2）由 $g(x)\geqslant 0$，可得 $\mathrm{e}^{-x}-(-x)\geqslant x^a-a\ln x$，即 $\mathrm{e}^{-x}-(-x)\geqslant \mathrm{e}^{\ln x^a}-a\ln x$①，

考虑 $h(t)=\mathrm{e}^t-t$，

由 $h'(t)=\mathrm{e}^t-1$ 得，当 $t<0$ 时，$h(t)$ 递减，当 $t>0$ 时，$h(t)$ 递增，

所以①即为 $h(-x)\geqslant h(a\ln x)$，

由于求实数 a 的最小值，考虑化为 $a<0$，所以 $-x\leqslant a\ln x$，即 $a\geqslant -\frac{x}{\ln x}$，

令 $l(x)=-\frac{x}{\ln x}$，分析单调性可得 $l(x)$ 的最大值为 $-\mathrm{e}$，所以 a 的最小值为 $-\mathrm{e}$.

……………………………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

解：（1）X 的可能值为 1 和 $n+1$，$P(X=1)=(1-p)^n$，$P(X=n+1)=1-(1-p)^n$，

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	$n+1$
P	$(1-p)^n$	$1-(1-p)^n$

所以 $E(X)=1\times(1-p)^n+(n+1)\times[1-(1-p)^n]=n+1-n(1-p)^n$.

……………………………………………………………………………………（5 分）

（2）方案乙总费用的数学期望：

$E(Y)=aE(X)+2.5a=a[n+1-n(1-p)^n]+2.5a$，

当 $p=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}$ 时，$E(Y)=a\left[n+1-n\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}\right)^n\right]+2.5a=a\left(n+3.5-n\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}}\right)$，

又方案甲的总费用为 $Z=an$，令 $E(Y)<Z$，得 $a\left(n+3.5-n\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}}\right)<an$，

所以 $a\left(n+3.5-n\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}}\right)<an$，即 $n\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}}>3.5$，

设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}$，$x\in[2,+\infty)$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\left(1-\frac{x}{10}\right)$，$x\in[2,+\infty)$，

令 $f'(x)>0$，得 $2\leqslant x<10$，$f'(x)<0$，得 $x>10$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[2,10)$ 上单调递增，在区间 $(10,+\infty)$ 上单调递减，

$f(x)_{\max}=f(10)=\frac{10}{\mathrm{e}}\approx 3.679>3.5$，

且 $f(11)=11\mathrm{e}^{-1.1}\approx 3.663>3.5$，$f(12)=12\mathrm{e}^{-1.2}\approx 3.612>3.5$，

$f(13)=13\mathrm{e}^{-1.3}\approx 3.549>3.5$，$f(14)=14\mathrm{e}^{-1.4}\approx 3.458<3.5$，

所以使得采用方案乙总费用的数学期望低于方案甲的 n 的最大值为 13．

……………………………………………………………………………………………（12 分）