

秘密★启用前

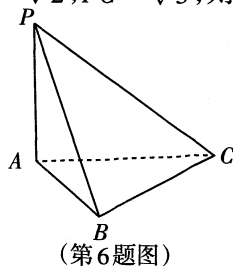
理科数学

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

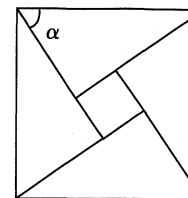
一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| - 2 < 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ D. $\{x \mid -2 < x \leq 2\}$
- 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $zi = 2 + \sqrt{2}i$, 则 $|z| =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{6}$ C. 2 D. 4
- 已知 $a = 2^{-\frac{2}{3}}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, $c = 3^{-\frac{3}{2}}$, 则
A. $b < a < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
- 设一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差为 100, 则数据 $0.1x_1, 0.1x_2, \dots, 0.1x_n$ 的方差为
A. 0.1 B. 1 C. 10 D. 100
- 椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{AF_2} \cdot \overrightarrow{F_1F_2} = 0$, 则 C 的方程为
A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$
- 如图所示,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp BC$ 且 $PA = BC = 1$, $PB = AC = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{3}$, 则下列命题不正确的是
A. 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC
B. 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC
C. 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC
D. 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC



- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 则边 BC 的长有
A. 最大值 $2\sqrt{5}$ B. 最小值 $2\sqrt{5}$
C. 最大值 2 D. 最小值 2

- 三国时期, 吴国数学家赵爽绘制“勾股圆方图”证明了勾股定理(西方称之为“毕达哥拉斯定理”)。如图, 四个完全相同的直角三角形和中间的小正方形拼接成一个大正方形, 角 α 为直角三角形中的一个锐角, 若该勾股圆方图中小正方形的面积 S_1 与大正方形面积 S_2 之比



(第8题图)

为 $1:25$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) =$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

- 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 以点 F 为圆心, 1 为半径的圆与 C 的渐近线相切于点 $P\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, t\right)$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

- $(1 + \sqrt{x})^5 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为

- A. 1 B. 32 C. 192 D. 252

- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2\sin C = \frac{a^2 + b^2 + 1 + 2ab}{a + b}$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆面积的最小值为

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

- 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - \ln x - ax + a (a \in \mathbb{R})$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 若 $f(x) \geq 1$ 恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-1, 0]$ D. $[0, +\infty)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

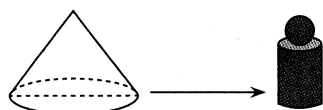
- 已知不等式组 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ 2x - y \leq 0, \\ kx - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形区域, 则实数 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- 若曲线 $y = \ln(3x - 8)$ 与曲线 $y = x^2 - 3x$ 在公共点处有相同的切线, 则该切线的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, $AB=3$, $AC=\sqrt{7}$, 且 $BC\sin B\cos C+AB\sin B\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$,

则 $AD=$ $\blacktriangle$.

16. 欲将一底面半径为 $\sqrt{3}\text{cm}$, 体积为 $3\pi\text{cm}^3$ 的圆锥体模型打磨成一个圆柱体和一个球体相切的模具, 如图所示, 则打磨成的圆柱体和球体的体积之和的最大值为 $\blacktriangle\text{cm}^3$.



(第16题图)

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题, 每道试题考生都必须作答。第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共60分。

17. (12分)

已知公差为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3=9$, 且 a_2 是 a_1 与 a_3+4 的等比中项。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

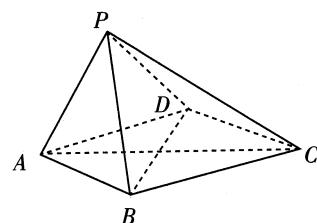
(2) 若 $b_n = a_n \cdot 2^{a_n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

18. (12分)

如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=PB=PD=AB=2$, 四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle BAD=60^\circ$ 。

(1) 证明: $BD \perp$ 平面 PAC ;

(2) 求二面角 $B-PC-D$ 的大小。



(第18题图)

19. (12分)

为了适应教育革新形势, 某实验高中新建实验楼、置办实验仪器、开设学生兴趣课堂, 将分子生物学知识和技术引入其中, 激发了广大学生的学习和科研热情。现已知该生物科研兴趣小组共有9名学生。在一次制作荧光标记小鼠模型时, 将9名学生分成3组, 每组3人。

(1) 若将实验进程分为三个阶段, 各个阶段由一个成员独立完成。现已知每个阶段用时1小时, 每个阶段各成员成功率为 $\frac{1}{3}$ 。若任意过程失败, 则该实验须重新开始。求一个组在不超过4个小时完成实验任务的概率;

(2) 现某小组3人代表学校组队外出参加生物实验竞赛, 其中一项赛程为小鼠灌注实验。该赛程规则为: 三人同时进行灌注实验, 但每人只有一次机会, 每个队员成功的概率均为 $\frac{2}{3}$ 。若单个队员实验成功计2分, 失败计1分。

① 设小组总得分为 X , 求 X 的分布列与数学期望;

② 主办方预计通过该赛程了解全国生物兴趣课程的开设情况。现从所有参赛队员中抽取 n 人成绩计入总得分, 若总得分大于 n 的概率为 K_n , 求数列 $\{K_n\}$ 的前15项和。

20. (12分)

已知 P 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一动点, F 为 C 的焦点, 定点 $Q(3, 1)$ 在 C 的内部, 若 $|PQ| + |PF|$ 的最小值为4。

(1) 求 C 的方程;

(2) 不经过原点的直线 l 与 C 交于 A, B 两点 (其中点 A 在 x 轴上方), 若以线段 AB 为直径的圆经过点 F , 且圆心在直线 $y = -1$ 上。证明: 直线 l 与 C 在点 A 处的切线垂直。

21. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2, a \in \mathbb{R}$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f'(x)$ 的最小值为 $-e$ (其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数), 求 a 的值。

(二) 选考题: 共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{t+1} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+1} \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 曲线 $C_2: \rho = \rho \cos^2 \theta + \cos \theta$ 。

(1) 求 C_1 的普通方程与 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设曲线 C_1, C_2 的公共点为 A, B , O 为坐标原点, 求 $\triangle OAB$ 的面积。

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

(1) 证明: $\sqrt{a^2 + 1} \geq \frac{a+1}{\sqrt{2}}$;

(2) 若 $a > 0, b > 0$, 求 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值。



理科数学答题卡

答题卡类型: A

姓 名 _____

准考证号

贴 条 形 码 区

注
意
事
项

1. 答题前，考生务必首先认真核准条形码上的姓名、准考证号，然后使用0.5毫米的黑色笔迹签字笔将姓名、准考证号填写在相应位置，并在答题卡背面左上角填写姓名和准考证号末两位。准考证号的每个书写框内只能填写一个阿拉伯数字。要求字体工整、笔迹清晰。填写阿拉伯数字的样例: 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔填涂。修改时，要用橡皮将修改处擦干净。规范填涂样例: ☒ ☐ ☐ ☐
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米的黑色笔迹签字笔书写；作图题可先用铅笔绘出，确认后再用0.5毫米的黑色笔迹签字笔描清楚。要求字体工整、笔迹清晰。严格按题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效；在试题、草稿纸上答题无效。
4. 保持答题卡清洁、完整。严禁折叠，严禁在答题卡上作任何标记，严禁使用涂改液、胶带纸和修正带。严禁污染答题卡上的黑色方块。
5. 未按上述要求填写、答题，影响评分质量，后果自负。

☒ 此栏禁止考生填涂 ☐ 缺考标记 ☐ 缺考考生由监考员贴条形码，并用2B铅笔填涂左边的缺考标记。

选择题（用2B铅笔填涂）

- | | | |
|---|--|--|
| ☒ 1 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 6 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 11 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D |
| ☒ 2 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 7 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 12 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D |
| ☒ 3 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 8 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ |
| ☒ 4 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 9 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ |
| ☒ 5 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ 10 ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D | ☒ |

非选择题（用0.5毫米的黑色笔迹签字笔书写）

13. _____ 14. _____
15. _____ 16. _____

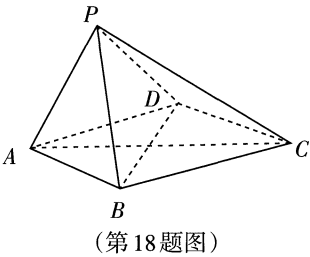
17. (12分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

续17

18. (12分)



请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

续18

19. (12分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效



考生 必填	姓名		准考证号			考生务必将姓名、准考证号末两位用0.5毫米的黑色笔迹签字笔认真填写在书写框内，准考证号末两位的每个书写框只能填写一个阿拉伯数字。
	末两位					

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

20. (12分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

21. (12分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

选考题

22 ☐

23 ☐

(请考生在22、23两题中任选一题作答。注意：只能做所选定的题目。如果多做，则按所做的第一个题目计分，作答时请用2B铅笔将所选题号后的方框涂黑。)

选做题号 (10分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效