

高三第一次质量监测

数学参考答案

1. D $\because 5-x^2 \geq 0, \therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}, \therefore M = \{x | -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}\}. \because y = \sqrt{5-x^2} \in [0, \sqrt{5}], \therefore N = \{0, 1, 2\}, \therefore M \cap N = \{0, 1, 2\}.$

2. C 依题意, $z = \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+6i+6i-9}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$, 则 $\bar{z} = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$, 所以在复平面内, 复数 $\bar{z}$ 所对应的点位于第三象限.

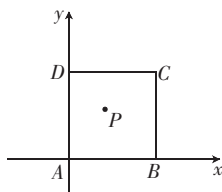
3. B $a+b = (-1, 1), (a+b) \cdot c = -1+m=0$, 故 $m=1$, 所以 $|c| = \sqrt{2}.$

4. D 根据题意, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 因为 $f(x) = (e^{2x} + e^{-2x}) \ln |x| = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 排除 B 选项. 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$, 排除 A, C 选项.

5. A 因为 $(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1})^2 = (a+1) + (b+1) + 2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+1} \leq (a+1) + (b+1) + (a+1) + (b+1) = 2(a+b+2) = 8$, 当且仅当 $a=b=1$ 时取等号. 所以 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}.$

6. B 将函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 因为 $g(x)$ 是奇函数, 所以 $\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $\omega = 1 + 6k (k \in \mathbf{Z})$, 故 $M = 1 + 7 + \dots + 49 = \frac{(1+49) \times 9}{2} = 225.$

7. C 建立如图所示的直角坐标系, 则 $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$. 设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{PA} = (-x, -y), \overrightarrow{PB} = (2-x, -y), \overrightarrow{PC} = (2-x, 2-y), \overrightarrow{PD} = (-x, 2-y)$, 所以 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = (2-2x, -2y) \cdot (2-2x, 4-2y) = (2-2x)^2 + 4y^2 - 8y$, 所以当 $x=1, y=1$ 时, $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ 取得最小值 -4.



8. D $\because f(x-1)$ 是奇函数, $\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 即 $f(-2-x) + f(x) = 0$. 又 $\because f(x+1)$ 为偶函数, $\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 即 $f(2-x) = f(x)$.

$\therefore f(-2-x) + f(2-x) = 0, \therefore f(x-2) + f(x+2) = 0, \therefore f(x+8) = f(x),$

即函数 $y=f(x)$ 的周期为 8, $\therefore f(2018) = f(2) = f(0) = 1, f(2019) = f(3) = f(-1) = 0,$

$f(2020) = f(4) = f(-2) = -f(0) = -1, f(2021) = f(5) = f(-3) = -f(1) = -2,$

故 $f(2021)$ 最小.

9. BCD 选项 A: 当取 $a=1, b=-1$ 时, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, $\therefore$ 本命题是假命题.

选项 B: 已知 $a > b > 0, c < d < 0$, 所以 $-\frac{1}{d} > -\frac{1}{c} > 0, \therefore -\frac{a}{d} > -\frac{b}{c}$, 故 $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$, $\therefore$ 本命题是真命题.

选项 C: $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0 > 0 < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}, \therefore c < 0, \therefore \frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}, \therefore$ 本命题是真命题.

选项 D: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow \frac{b-a}{ab} > 0, \therefore a > b, \therefore b-a < 0, \therefore ab < 0, \therefore$ 本命题是真命题. 故本题选 BCD.

10. AD 由题意知, $\omega = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$. 因为 $f(\frac{\pi}{4} + x) = f(\frac{\pi}{4} - x)$, 所以直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

所以 $3 \times \frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi = \frac{3\pi}{4}.$

11. ACD 令 $z = a + bi$, 代入 $z^2 + 2|z| = 0$, 得 $a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + 2abi = 0$, 解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=0, \\ b=2 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a=0, \\ b=-2, \end{cases}$ 所以 $z=0$ 或 $z=2i$ 或 $z=-2i$.

12. ABC 由 $(4k-1-\ln x)x < \ln x - x + 3$, 可得 $k < \frac{1}{4}(\ln x + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x})$.

令 $F(x) = \ln x + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} (x > 1)$,

则 $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x-2-\ln x}{x^2}$.

令 $\varphi(x) = x - \ln x - 2$, 因为 $\varphi'(x) = \frac{x-1}{x} > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $\varphi(1) < 0$, 所以 $F'(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个实数根 x_0 ,
于是 $F(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x)_{\min} = F(x_0) = \ln x_0 + \frac{3}{x_0} + \frac{\ln x_0}{x_0} (*)$.

因为 $F'(3) = \frac{1-\ln 3}{9} < 0, F'(4) = \frac{2-\ln 4}{16} = \frac{2(1-\ln 2)}{16} > 0$,

所以 $x_0 \in (3, 4)$, 且 $x_0 - 2 - \ln x_0 = 0$,

将 $\ln x_0 = x_0 - 2$ 代入 $(*)$ 式,

得 $F(x)_{\min} = F(x_0) = x_0 - 2 + \frac{3}{x_0} + \frac{x_0 - 2}{x_0} = x_0 + \frac{1}{x_0} - 1, x_0 \in (3, 4)$.

因为 $t = x_0 + \frac{1}{x_0} - 1$ 在 $(3, 4)$ 上为增函数, 所以 $t \in (\frac{7}{3}, \frac{13}{4})$, 即 $\frac{1}{4}F(x)_{\min} \in (\frac{7}{12}, \frac{13}{16})$.

因为 k 为整数, 所以 $k \leq 0$.

13. $\frac{32}{5}$ 公比 $q = \frac{a_2+a_4}{a_1+a_3} = 2, a_1+4a_1 = 2$, 则 $a_1 = \frac{2}{5}$, 所以 $a_5 = \frac{2}{5} \times 2^4 = \frac{32}{5}$.

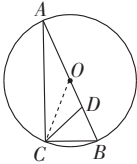
14. $[0, 16]$ $A = \{x | 0 \leq x < 16\}$, 依题意可得 $0 \leq a \leq 16$, 所以 a 的取值范围是 $[0, 16]$.

15. $\frac{1}{8} \cos \frac{8\pi}{7} \cdot \cos \frac{16\pi}{7} \cdot \cos \frac{32\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}$

$$= -\frac{2\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{2\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4\sin \frac{\pi}{7}}$$

$$= -\frac{2\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

16. $\sqrt{3}+1$ 如图, 连接 OC , 则 $\angle COD = 2\angle A = 30^\circ, \angle OCD = 180^\circ - 30^\circ - 105^\circ = 45^\circ$, 由正弦定理
得 $\frac{OC}{\sin 105^\circ} = \frac{OD}{\sin 45^\circ}$, 则 $OC = \sqrt{3}+1$, 则该三角形外接圆的半径为 $\sqrt{3}+1$.



17. 解: 选择①, 因为 $f'(x) = e^x + a$, 1 分
 所以 $f'(0) = e^0 + a = 0$, 故 $a = -1, f(x) = e^x - x - 1$, 2 分
 $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$, 得 $x = 0$ 3 分
 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$.
 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 6 分
 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$ 8 分
 因为 $f(-1) = \frac{1}{e} < f(1) = e - 2$,
 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = e - 2$ 10 分
 选择②, 因为 $f'(x) = e^x + a$, 1 分
 所以 $f'(1) = e + a = e - 1$, 故 $a = -1, f(x) = e^x - x - 1$ 2 分
 $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$, 得 $x = 0$ 3 分
 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$.
 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 6 分

- 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$ 8 分
- 因为 $f(-1)=\frac{1}{e}<f(1)=e-2$,
- 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)=e-2$ 10 分
- 选择③, 因为 $f'(x)=e^x+a$, 1 分
- 所以 $f(-x)-f'(x)=e^{-x}-e^x-ax-1-a$,
- 因为 $f(-x)-f'(x)$ 为奇函数, 所以由 $f(-x)-f'(x)=f(x)-f'(-x)$, 可得 $a=-1$.
- $f'(x)=e^x-1$, 令 $f'(x)=e^x-1=0$, 得 $x=0$ 3 分
- 当 $x\in(-1,0)$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$.
- 所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减, 在 $(0,1)$ 上单调递增, 6 分
- 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$ 8 分
- 因为 $f(-1)=\frac{1}{e}<f(1)=e-2$,
- 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)=e-2$ 10 分
18. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2+m$; 1 分
- 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=2n$ 2 分
- 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_1=2+m$ 满足 $a_n=2n$, 所以 $a_n=2n$, 4 分
- 则 $2+m=2$, 即 $m=0$ 5 分
- (2) $2^{a_n}=2^{2n}=4^n$, 数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{4(1-4^n)}{1-4}=\frac{4^{n+1}-4}{3}$, 7 分
- 可知 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, 8 分
- 数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$, 10 分
- 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{4^{n+1}-4}{3}+1-\frac{1}{n+1}=\frac{4^{n+1}-1}{3}-\frac{1}{n+1}$ 12 分
19. 解: (1) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{8}AC \cdot BC \cdot \sin A$, 所以 $\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B=\frac{\sqrt{3}}{8}AC \cdot BC \cdot \sin A$, 2 分
- 则 $\sin C \cdot \sin A \cdot \sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin B \cdot \sin A \cdot \sin A$, 4 分
- 所以 $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 5 分
- (2) 设 $AB=a$, 所以 $AD=a, BC=2BD=\frac{4a}{\sqrt{3}}, BD=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, 7 分
- 在 $\triangle ABD$ 中, $\cos A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB \cdot AD}=\frac{2a^2-\frac{4}{3}a^2}{2a^2}=\frac{1}{3}$, 9 分
- 因为 A 为三角形的内角, 所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 10 分
- 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理知 $\sin C=\frac{AB}{BC} \cdot \sin A=\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 12 分
20. 解: (1) 由图可知 $A=2$, 1 分
- $T=4(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})=\pi$, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$ 3 分
- 将点 $(\frac{\pi}{12}, 2)$ 代入 $f(x)$, 得 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$, 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,
- 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 5 分
- (2) $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}), g(x)=f(x-\frac{\pi}{4})=-2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$, 6 分

则 $h(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})-2\cos(2x+\frac{\pi}{3})=2\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{12})$, 8 分

因为 $x\in[0,m]$, 所以 $2x+\frac{\pi}{12}\in[\frac{\pi}{12},2m+\frac{\pi}{12}]$, 9 分

所以 $\frac{\pi}{12}<2m+\frac{\pi}{12}\leq\frac{\pi}{2}$, 即 $0<m\leq\frac{5\pi}{24}$, 所以 m 的取值范围为 $(0,\frac{5\pi}{24}]$ 12 分

21. 解: (1) $b\cos C+c\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=a$, 3 分

所以 $a=1$ 5 分

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-1}{2bc}=\frac{1}{2c}(b+\frac{c^2}{b}-\frac{1}{b})$ 6 分

设 $f(b)=\frac{1}{2c}(b+\frac{c^2}{b}-\frac{1}{b})$ ($b\in[1,\sqrt{3}]$), 则 $f'(b)=\frac{1}{2c}(1-\frac{c^2}{b^2}+\frac{1}{b^2})>0$, 8 分

所以 $f(b)$ 是 $[1,\sqrt{3}]$ 上的增函数. 故 $f(b)\leq f(\sqrt{3})=\frac{c^2+2}{2\sqrt{3}c}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(c+\frac{2}{c})\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}\times 3=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $b=\sqrt{3}$, $c=1$ 时, 取得等号. 11 分

于是, $\cos A\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 A 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$ 12 分

22. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$, 定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{1+x^2-\ln x}{x^2}$ 1 分

设 $g(x)=1+x^2-\ln x$, 则 $g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}=\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x}$, 2 分

令 $g'(x)=0$, 得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调递增,

则 $g(x)_{\min}=g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2>0$, 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数. 4 分

故 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上的最大值为 $f(e)=\frac{1}{e}+e$, 最小值为 $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-e$ 5 分

(2) 不等式 $f(x_0)\leq a+2$ 可转化为 $x_0^2-2x_0\leq a(x_0-\ln x_0)$, 6 分

令 $F(x)=x-\ln x$ ($x>0$), 则 $F'(x)=\frac{x-1}{x}$ ($x>0$).

当 $0<x<1$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $x>1$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 7 分

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=1>0$, 于是 $a\geq\frac{x_0^2-2x_0}{x_0-\ln x_0}$, 8 分

记 $G(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$, $x\in(0,e]$,

则 $G'(x)=\frac{(2x-2)(x-\ln x)-(x-2)(x-1)}{(x-\ln x)^2}=\frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(x-\ln x)^2}$, 9 分

因为 $2-2\ln x=2(1-\ln x)\geq 0$,

所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,e)$ 上单调递增. 10 分

所以 $G(x)_{\min}=G(1)=-1$, 11 分

故 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$ 12 分