

2021年高三年级统一质量检测

数学试题

2021.03

本试题卷共 6 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = \log_2 x, x > 4\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} | y = x^{\frac{1}{2}}\}$ ，则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$

A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[0, 2]$ D. $(0, 2)$

2. 若 α, β 表示两个不同的平面， m 为平面 α 内一条直线，则

- A. “ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的充分不必要条件
B. “ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的必要不充分条件
C. “ $m \perp \beta$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的必要不充分条件
D. “ $m \perp \beta$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的充要条件

3. 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 2

4. 18 世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数，使复数及其运算具有了几何意义，例如， $|z| = |OZ|$ ，也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点

的距离。在复平面内，复数 $z_0 = \frac{a+2i}{1+i}$ (i 是虚数单位， $a \in \mathbb{R}$) 是纯虚数，其对应的点为

Z_0 ， Z 为曲线 $|z|=1$ 上的动点，则 Z_0 与 Z 之间的最小距离为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

5. 若 $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1), & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ 的解集为

- A. $(-1, 0) \cup (\sqrt{3}-1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (0, \sqrt{3}-1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (\sqrt{3}-1, +\infty)$

6. 已知角 θ 终边上有一点 $P(\tan \frac{4}{3}\pi, 2\sin(-\frac{17}{6}\pi))$, 则 $\cos \theta$ 的值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 已知 $y = f(x)$ 为奇函数, $y = f(x+1)$ 为偶函数, 若当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(x+a)$,

则 $f(2021) =$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

8. 在抛物线 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 第一象限内一点 (a_n, y_n) 处的切线与 x 轴交点的横坐标记为 a_{n+1} , 其中

$n \in \mathbb{N}^*$, 已知 $a_2 = 32$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $m \geq S_n$ 恒成立, 则 m 的最小值为

- A. 16 B. 32 C. 64 D. 128

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. 关于圆 $C: x^2 + y^2 - kx + 2y + \frac{1}{4}k^2 - k + 1 = 0$, 下列说法正确的是

- A. k 的取值范围是 $k > 0$
B. 若 $k = 4$, 过 $M(3, 4)$ 的直线与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$; 其方程为 $12x - 5y - 16 \geq 0$
C. 若 $k = 4$, 圆 C 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交
D. 若 $k = 4$, $m > 0, n > 0$, 直线 $mx - ny - 1 = 0$ 恒过圆 C 的圆心, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \geq 8$ 恒成立

10. 已知向量 $\vec{a} = (2\sin^4 \frac{x}{2}, \cos^4 \frac{x}{2} - f(x))$, $\vec{b} = (1, -\frac{1}{2})$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 则下列说法正确的是

- A. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y = \frac{1}{4}\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{3}{4}$ 的图象
B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
C. 直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴
D. 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 上单调递减

11. 若实数 $a < b$ ，则下列不等关系正确的是

A. $(\frac{2}{5})^b < (\frac{2}{5})^a < (\frac{3}{5})^a$

B. 若 $a > 1$ ，则 $\log_a ab > 2$

C. 若 $a > 0$ ，则 $\frac{b^2}{1+a} > \frac{a^2}{1+b}$

D. 若 $m > \frac{5}{3}$ ， $a, b \in (1, 3)$ ，则 $\frac{1}{3}(a^3 - b^3) - m(a^2 - b^2) + a - b > 0$

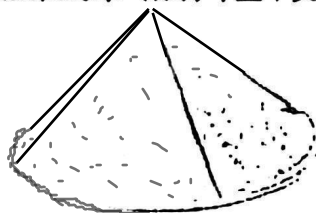
12. 在南方不少地区，经常看到人们头戴一种用木片、竹篾或苇蒿等材料制作的斗笠，用来遮阳或避雨，随着旅游和文化交流活动的开展，斗笠也逐渐成为一种时尚旅游产品。有一种外形为圆锥形的斗笠，称为“灯罩斗笠”，根据人的体型、高矮等制作成大小不同的型号供人选择使用，不同型号的斗笠大小经常用帽坡长（母线长）和帽底宽（底面圆直径长）两个指标进行衡量。现有一个“灯罩斗笠”，帽坡长 20 厘米，帽底宽 $20\sqrt{3}$ 厘米，关于此斗笠，下面说法正确的是

A. 斗笠轴截面（过顶点和底面中心的截面图形）的顶角为 120°

B. 过斗笠顶点和斗笠侧面上任意两母线的截面三角形的最大面积为 $100\sqrt{3}$ 平方厘米

C. 若此斗笠顶点和底面圆上所有点都在同一个球上，则该球的表面积为 1600π 平方厘米

D. 此斗笠放在平面上，可以盖住的球（保持斗笠不变形）的最大半径为 $20\sqrt{3} - 30$ 厘米



三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中的常数项是_____。（用数字作答）

14. 已知非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ ，且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____。

15. 某驾驶员培训学校为对比了解“科目二”的培训过程采用大密度集中培训与周末分散培训两种方式的效果，调查了 105 名学员，统计结果为：接受大密度集中培训的 55 个学员中有 45 名学员一次考试通过，接受周末分散培训的学员一次考试通过的有 30 个。根据统计结果，认为“能否一次考试通过与是否集中培训有关”犯错误的概率不超过_____

附：
$$k^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.05	0.025	0.010	0.001
k	3.841	5.024	6.635	10.828

16. 2021年是中国传统的“牛”年，可以在平面坐标系中用抛物线与圆勾勒出牛的形象. 已知抛物线 $Z: x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，圆 $F: x^2 + (y-1)^2 = 4$ 与抛物线 Z 在第一象限的交点为 $P(m, \frac{m^2}{4})$ ，直线 $l: x = t (0 < t < m)$ 与抛物线 Z 的交点为 A ，直线 l 与圆 F 在第一象限的交点为 B ，则 $m =$ _____； $\triangle FAB$ 周长的取值范围为 _____.
- (第一空 2 分，第二空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

从“① $S_n = n(n + \frac{a_1}{2})$ ；② $S_2 = a_3$ ， $a_4 = a_1 a_2$ ；③ $a_1 = 2$ ， a_4 是 a_2, a_8 的等比中项.” 三个条件任选一个，补充到下面横线处，并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公差 d 不等于零，_____， $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = S_{2n+1} - S_{2n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 W_n ，求 W_n .

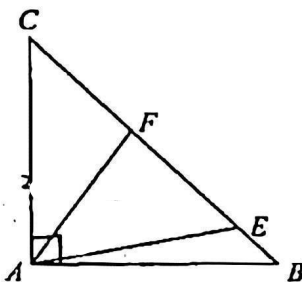
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (12 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB \perp AC$ ， $AB = AC = 2$ ，点 E, F 是线段 BC (含端点) 上的动点，且点 E 在点 F 的右下方，在运动的过程中，始终保持 $\angle EAF = \frac{\pi}{4}$ 不变，设 $\angle EAB = \theta$ 弧度.

(1) 写出 θ 的取值范围，并分别求线段 AE, AF 关于 θ 的函数关系式；

(2) 求 $\triangle EAF$ 面积 S 的最小值.

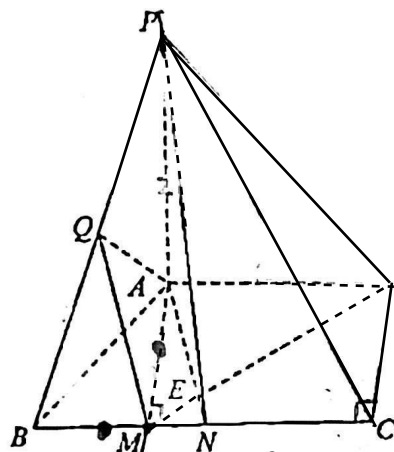


19. (12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BC \perp CD$, $PA = AD = 2$, $CD = 1$, $BC = 3$, 点 M, N 在线段 BC 上, $BM = 2MN = 1$, $AN \cap MD = E$, Q 为线段 PB 上的一点.

(1) 求证: $MD \perp$ 平面 PAN ;

(2) 若平面 MQA 与平面 PAN 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{4}{5}$, 求直线 MQ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



20. (12分)

某商场每年都会定期答谢会员, 允许年度积分超过指定积分的会员参加特价购物赠券活动. 今年活动的主题为“购物三选一, 真情暖心里”, 符合条件的会员可以特价购买礼包 A (十斤肉类)、礼包 B (十斤蔬菜) 和礼包 C (十斤鸡蛋) 三类特价商品中的任意一类, 并且根据购买的礼包不同可以获赠价值不等的代金券. 根据以往经验得知, 会员购买礼包 A 和礼包 B 的概率均为 $\frac{2}{5}$.

(1) 预计今年有 400 名符合条件的会员参加活动, 求商场为此活动需要准备多少斤鸡蛋合理;

(2) 在促销活动中, 若有甲、乙、丙三位会员同时参与答谢活动, 各人购买礼包相互独立,

已知购买礼包 A 或礼包 B 均可以获得 50 元商场代金券, 购买礼包 C 可以获得 25 元商场代金券, 设 Y 是三人获得代金券金额之和, 求 Y 的分布列和数学期望.

21. (12 分)

在平面直角坐标系中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 右焦点为 F_2 ,

上顶点为 A_2 , 点 $P(a, b)$ 到直线 F_2A_2 的距离等于 1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 $l: y = kx + m (m > 0)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, D 为 AB 中点, 直线 DE, DF 分

别与圆 $W: x^2 + (y - 3m)^2 = m^2$ 相切于点 E, F . 求 $\angle EWF$ 的最小值.

22. (12 分)

青岛胶东国际机场的显著特点之一是弯曲曲线的运用, 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率. 曲线的曲率定义如下: 若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数, 则曲线 $y = f(x)$

在点 $(x, f(x))$ 处的曲率 $K = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}$.

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - b \cos(x-1)$ ($a \geq 0, b > 0$), 若 $a = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求 b ;

(2) 若函数 $f(x)$ 存在零点, 求 a 的取值范围;

(3) 已知 $1.098 < \ln 3 < 1.099$, $e^{0.048} < 1.050$, $e^{-0.045} < 0.956$, 证明: $1.14 < \ln \pi < 1.15$.

