

高三数学参考答案及评分标准

2021.3

一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1-4 BCDD 5-8 ACDB

二、多项选择题(每小题5分,共20分)

9. AD 10. BD 11. BC 12. ACD

三、填空题(每小题5分,共20分)

13. $2\sqrt{2}$ 14. $\sin x$ (不唯一) 15. 5 16. $\frac{\pi}{2}$

四、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解: $f(x) = \sin\omega x \cos\varphi + \cos\omega x \sin\varphi = \sin(\omega x + \varphi)$, 1分

由已知函数 $f(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, 求得 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 2分

若选①, 则有 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0, \varphi = -\frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, 6分

当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时, $t = 2x - \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 8分

所以当 $t = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 1. 10分

若选②, 则有 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$,

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0, \varphi = -\frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 6分

当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时, $t = 2x - \frac{\pi}{3} \in (0, \frac{2\pi}{3})$, 8分

所以当 $t = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 1. 10分

若选③, 则有 $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 6分

高三数学答案第1页(共6页)

当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时, $t = 2x + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$, 8分

显然, 函数 $f(x)$ 在该区间上没有最大值. 10分

18. 解:(1) 由已知 $S_n = \frac{1}{2}(S_{n+1} - S_n) + 1$,

整理得 $S_{n+1} = 3S_n - 2$, 2分

所以 $S_{n+1} - 1 = 3(S_n - 1)$,

令 $n = 1$, 得 $S_1 = \frac{1}{2}a_2 + 1 = 4$, 所以 $S_1 - 1 = 3$,

所以 $\{S_n - 1\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列, 4分

所以 $S_n - 1 = (S_1 - 1) \times 3^{n-1} = 3^n$,

所以 $S_n = 3^n + 1$; 6分

(2) 由(1)知, $S_n = 3^n + 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n + 1 - (3^{n-1} + 1) = 2 \times 3^{n-1}$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 4$,

所以 $a_n = \begin{cases} 4, n = 1, \\ 2 \times 3^{n-1}, n \geq 2, \end{cases}$ 8分

所以 $\frac{1}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, n = 1, \\ \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3})^{n-1}, n \geq 2, \end{cases}$ 10分

所以 $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{3^{n-1}})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$ 12分

19. (1) 证明: 取 CD 的中点 N , 连结 FN, MN ,

因为 F, N 分别为 AB, CD 的中点,

所以 $FN \parallel AD$,

又因为 $FN \not\subset$ 平面 $PAD, AD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $FN \parallel$ 平面 PAD , 2分

同理, $MN \parallel$ 平面 PAD ,

又因为 $FN \cap MN = N$,

所以平面 $MFN \parallel$ 平面 PAD ,

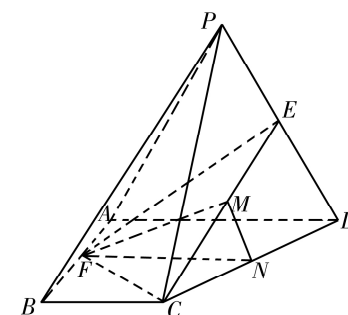
又因为 $FM \subset$ 平面 MFN ,

所以 $FM \parallel$ 平面 PAD 4分

(2) 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, AB \perp AD$,

所以 $AB \perp$ 平面 PAD ,

所以 $\angle AEF$ 即为直线 EF 与平面 PAD 所成的角,



高三数学答案第2页(共6页)

且 $\tan \angle AEF = \frac{AF}{AE} = \frac{2}{AE}$, 当 AE 最小, E 为 PD 中点时, $AE \perp PD$, 此时 $\angle AEF$ 最大为 30° ,

又因为 $AF = 2$, 所以 $AE = 2\sqrt{3}$, 所以 $AD = 4$.

取 AD 的中点 O , 连结 PO, OC ,

易知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $AO \parallel BC$ 且 $AO = BC$,

所以四边形 $ABCO$ 为平行四边形,

所以 $AO \perp OC$, 6 分

以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OC}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O - xyz$.

则 $O(0,0,0), C(4,0,0), D(0,2,0), P(0,0,2\sqrt{3})$,

$E(0,1,\sqrt{3}), F(2,-2,0), \overrightarrow{CE} = (-4,1,\sqrt{3}), \overrightarrow{FC} = (2,2,0)$, 8 分

设 $\mathbf{n}_1 = (x,y,z)$ 为平面 CEF 的法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{FC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ -4x + y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 可取 $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 5)$.

设平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1,0,0)$, 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{93}}{31}$,

所以平面 CEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{93}}{31}$ 12 分

20. 解: (1) $\bar{x}^2 = 2304, \bar{y}^2 = 729, \sum_{i=1}^{20} x_i y_i - 20 \bar{x} \bar{y} = 1300, \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20 \bar{x}^2 = 2200$,

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - 20 \bar{y}^2 = 900,$$

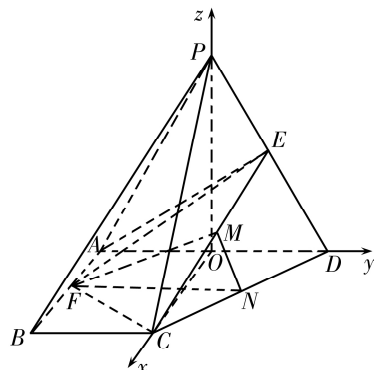
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - 20 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20 \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - 20 \bar{y}^2}} \approx 0.92, \text{ 2 分}$$

因为 y 与 x 的相关系数接近 1, 所以 y 与 x 之间具有较强的线性相关关系, 可用线性回归模型进行拟合; 4 分

$$\text{由题意可得, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - 20 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20 \bar{x}^2} = \frac{13}{22} \approx 0.591, \text{ 5 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 27 - 0.591 \times 48 \approx -1.37, \text{ 6 分}$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 0.59x - 1.37. \text{ 7 分}$$



(2) 以频率估计概率, 设甲款健身器使用年限为 X (单位: 年)

X	5	6	7	8
p	0.1	0.4	0.3	0.2

$$E(X) = 5 \times 0.1 + 6 \times 0.4 + 7 \times 0.3 + 8 \times 0.2 = 6.6, \text{ 9 分}$$

设乙款健身器使用年限为 Y (单位: 年)

Y	5	6	7	8
p	0.3	0.4	0.2	0.1

$$E(Y) = 5 \times 0.3 + 6 \times 0.4 + 7 \times 0.2 + 8 \times 0.1 = 6.1, \text{ 11 分}$$

因为 $E(X) > E(Y)$, 所以该机构购买甲款健身器材更划算. 12 分

$$21. \text{ 解: (1) } f'(x) = \frac{2x \sin x - (x^2 - a) \cos x}{\sin^2 x}, f'(\frac{\pi}{2}) = \pi, \text{ 2 分}$$

所以 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y = \pi x$,

$$\text{所以 } f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{2}, \text{ 即 } \frac{\pi^2}{4} - a - 2 = \frac{\pi^2}{2}, a = -\frac{\pi^2}{4} - 2; \text{ 4 分}$$

(2) 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\sin x > 0$,

$$\text{所以 } \frac{x^2 - a}{\sin x} - 2 = 0 \text{ 可转化为 } x^2 - a - 2 \sin x = 0, \text{ 5 分}$$

$$\text{设 } g(x) = x^2 - a - 2 \sin x, \text{ 则 } g'(x) = 2x - 2 \cos x,$$

$$\text{当 } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ 时, } g'(x) > 0,$$

所以 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递增. 6 分

$$\text{当 } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 时, 设 } h(x) = g'(x) = 2x - 2 \cos x,$$

$$\text{此时 } h'(x) = 2 + 2 \sin x > 0,$$

所以 $g'(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时单调递增,

$$\text{又 } g'(0) = -2 < 0, g'(\frac{\pi}{2}) = \pi > 0,$$

所以存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x) = 0$ 且 $x \in (0, x_0)$ 时 $g(x)$ 单调递减,

$x \in [x_0, \frac{\pi}{2})$ 时 $g(x)$ 单调递增.

综上, 对于连续函数 $g(x)$, 在 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x)$ 单调递减,

在 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $g(x)$ 单调递增. 9 分

又因为 $g(0) = -a < 0$,

所以当 $g(\pi) = \pi^2 - a > 0$, 即 $a < \pi^2$ 时, 函数 $g(x)$ 有唯一零点在区间 (x_0, π) 上,
 当 $g(\pi) = \pi^2 - a \leq 0$, 即 $a \geq \pi^2$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上无零点, 11 分
 综上可知, 当 $0 < a < \pi^2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 1 个零点;
 当 $a \geq \pi^2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上没有零点. 12 分

22. 解: (1) 设点 M 坐标为 (x, y) , 则直线 A_1M, A_2M 的斜率分别为 $-\frac{y}{x+2}, \frac{y}{x-2}, x \neq \pm 2$, ...
 2 分

依题意知 $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{3}{4}$,
 化简得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$; 4 分

(2) ① 设直线 l 的方程为 $x = my + 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) (y_1 > 0, y_2 < 0)$,
 则 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_2}{x_2+2}}{\frac{y_1}{x_1-2}} = \frac{(x_1-2)y_2}{(x_2+2)y_1} = \frac{(my_1-1)y_2}{(my_2+3)y_1} = \frac{my_1y_2-y_2}{my_1y_2+3y_1} = \frac{my_1y_2-(y_1+y_2)+y_1}{my_1y_2+3y_1}$,
 又 $\begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消 x 得 $(3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0$,
 得 $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4}, \\ y_1y_2 = -\frac{9}{3m^2+4}, \end{cases}$ 6 分
 因此 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{-\frac{9m}{3m^2+4} + \frac{6m}{3m^2+4} + y_1}{-\frac{9m}{3m^2+4} + 3y_1} = \frac{-\frac{3m}{3m^2+4} + y_1}{-\frac{9m}{3m^2+4} + 3y_1} = \frac{1}{3}$,
 故 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1}{3}$; 8 分

② Q_1 坐标为 $(x_2, -y_2)$, 则直线 PQ_1 方程为 $y - y_1 = \frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x - x_1)$,
 令 $y = 0$ 解得 $x = \frac{(x_2-x_1)y_1}{y_1+y_2} + x_1 = \frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2} = \frac{(my_2+1)y_1+(my_1+1)y_2}{y_1+y_2} = \frac{2my_1y_2}{y_1+y_2} + 1$
 $= \frac{2m(-\frac{9}{3m^2+4})}{-\frac{6m}{3m^2+4}} + 1 = 4$,
 即直线 PQ_1 恒过 $D(4, 0)$ 点, 9 分

故 $S_{\triangle PFQ_1} = |S_{\triangle PFD} - S_{\triangle Q_1FD}|$
 $= |\frac{1}{2} \times 3|y_1| - \frac{1}{2} \times 3|y_2||$
 $= \frac{3}{2} ||y_1| - |y_2||$
 $= \frac{3}{2} |y_1 + y_2|$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{6|m|}{3m^2+4}$
 $= \frac{9}{3|m| + \frac{4}{|m|}}$
 $\leq \frac{9}{2\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,
 当 $m^2 = \frac{4}{3}$, 即 $m = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立, 11 分
 此时 $\triangle PFQ_1$ 面积最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 12 分