

试卷类型: A

潍坊市高考模拟考试

数 学

2021.3

本试卷共4页, 满分150分, 考试时间120分钟.

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本大题共8个小题, 每小题5分, 共40分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-2, 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2x = 0\}$, 则以下结论正确的是
A. $A = B$ B. $A \cap B = \{0\}$ C. $A \cup B = A$ D. $A \subseteq B$
2. 已知复数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ (i 为虚数单位), 则 $|z - 1|$ 的最大值为
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
3. 在一次数学实验中, 某同学运用图形计算器采集到如下一组数据:

x	-2	-1	1	2	3
y	0.24	0.51	2.02	3.98	8.02

在以下四个函数模型 (a, b 为待定系数) 中, 最能反映 x, y 函数关系的是

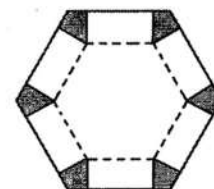
- A. $y = a + bx$ B. $y = a + \frac{b}{x}$ C. $y = a + \log_b x$ D. $y = a + b^x$
4. 在空间中, 下列命题是真命题的是
A. 经过三个点有且只有一个平面
B. 平行于同一平面的两直线相互平行
C. 如果两个角的两条边分别对应平行, 那么这两个角相等
D. 如果两个相交平面垂直于同一个平面, 那么它们的交线也垂直于这个平面
 5. 接种疫苗是预防和控制传染病最经济、有效的公共卫生干预措施. 根据实验数据, 人在接种某种病毒疫苗后, 有80%不会感染这种病毒, 若有4人接种了这种疫苗, 则最多1人被感染的概率为
A. $\frac{512}{625}$ B. $\frac{256}{625}$ C. $\frac{113}{625}$ D. $\frac{1}{625}$
 6. 多项式 $(x^2 + 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ 展开式中 x^3 的系数为
A. 6 B. 8 C. 12 D. 13

7. 已知 $2020^a = 2021$, $2021^b = 2020$, $c = \ln 2$, 则

- A. $\log_a c > \log_b c$ B. $\log_c a > \log_c b$
C. $a^c < b^c$ D. $c^a < c^b$

8. 某中学开展劳动实习, 学习加工制作食品包装盒. 现有一张边长为6的正六边形硬纸片, 如图所示, 裁掉阴影部分, 然后按虚线处折成高为 $\sqrt{3}$ 的正六棱柱无盖包装盒, 则此包装盒的体积为

- A. 144 B. 72
C. 36 D. 24



二、多项选择题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得5分, 选对但不全的得3分, 有选错的得0分.

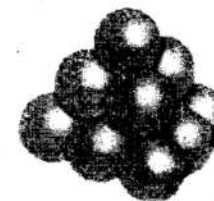
9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 一条渐近线方程为 $y = \frac{3}{4}x$, P 为 C 上一点, 则以下说法正确的是

- A. C 的实轴长为8 B. C 的离心率为 $\frac{5}{3}$
C. $|PF_1| - |PF_2| = 8$ D. C 的焦距为10

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases}$, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(f(-\frac{3}{2}\pi)) = 1$
C. $f(x)$ 是增函数 D. $f(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$

11. 南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中出现了如图所示的形状, 后人称为“三角垛”. “三角垛”的最上层有1个球, 第二层有3个球, 第三层有6个球, ..., 设各层球数构成一个数列 $\{a_n\}$, 则



- A. $a_4 = 12$ B. $a_{n+1} = a_n + n + 1$
C. $a_{100} = 5050$ D. $2a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$

12. 已知实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则下列结论正确的是

- A. $xy + yz + xz = 0$ B. z 的最大值为 $\frac{1}{2}$
C. z 的最小值为 $-\frac{1}{3}$ D. xyz 的最小值为 $-\frac{4}{27}$

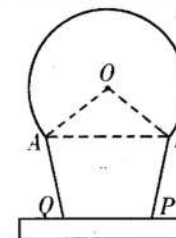
三、填空题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为1, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| =$ _____.

14. 写出一个存在极值的奇函数 $f(x) =$ _____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 点 P 在抛物线 C 上, PQ 垂直 l 于点 Q , QF 与 y 轴交于点 T , O 为坐标原点, 且 $|OT| = 2$, 则 $|PF| =$ _____.

16. 某市为表彰在脱贫攻坚工作中做出突出贡献的先进单位, 制作了一批奖杯, 奖杯的剖面图形如图所示, 其中扇形 OAB 的半径为10, $\angle PBA = \angle QAB = 60^\circ$, $AQ = QP = PB$, 若按此方案设计, 工艺制造厂发现, 当 OP 最长时, 该奖杯比较美观, 此时 $\angle AOB =$ _____.



四、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

在①函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称,②函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $P(\frac{\pi}{6},0)$ 对称,③函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $Q(\frac{2\pi}{3},-1)$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中并解答.

问题:已知函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi$ ($\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 最小正周期为 π ,且 _____,判断函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上是否存在最大值?若存在,求出最大值及此时的 x 值;若不存在,说明理由.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2=6$, $S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}+1$.

(1)证明:数列 $\{S_n-1\}$ 为等比数列,并求出 S_n .

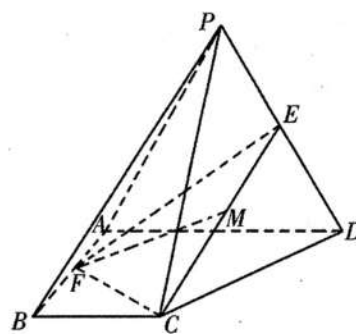
(2)求数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AD\parallel BC$, $AB\perp AD$, $AB=2BC=4$, E 是棱 PD 上的动点(除端点外), F, M 分别为 AB, CE 的中点.

(1)求证: $FM\parallel$ 平面 PAD ;

(2)若直线 EF 与平面 PAD 所成的最大角为 30° ,求平面 CEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值.



20. (12分)

在对人体的脂肪含量和年龄之间的关系的研究中,科研人员获得了一些年龄和脂肪含量的简单随机样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 20, 25 < x_i < 65$), 其中 x_i 表示年龄, y_i 表示脂肪含量,并计算得到 $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 48280$, $\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 15480$, $\sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 27220$, $\bar{x} = 48$, $\bar{y} = 27$, $\sqrt{22} \approx 4.7$.

(1)请用相关系数说明该组数据中 y 与 x 之间的关系可用线性回归模型进行拟合,并求 y 关于 x 的线性回归方程 $y = \hat{a} + \hat{b}x$ ($\hat{a}, \hat{b}$ 的计算结果保留两位小数);

高三数学试题第3页(共4页)

(2)科学健身能降低人体脂肪含量,下表是甲、乙两款健身器材的使用年限(整年)统计表:

使用年限 台数 款式	5年	6年	7年	8年	合计
甲款	5	20	15	10	50
乙款	15	20	10	5	50

某健身机构准备购进其中一款健身器材,以使用年限的频率估计概率,请根据以上数据估计,该机构选择购买哪一款健身器材,才能使用更长久?

参考公式:相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}};$$

对于一组具有线性相关关系的数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的

斜率和截距的最小二乘估计分别为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - a}{\sin x} - 2$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1)若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线经过坐标原点,求实数 a ;

(2)当 $a > 0$ 时,判断函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, \pi)$ 上的零点个数,并说明理由.

22. (12分)

在平面直角坐标系中, A_1, A_2 两点的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$, 直线 A_1M, A_2M 相交于点 M 且它们的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$, 记动点 M 的轨迹为曲线 E .

(1)求曲线 E 的方程;

(2)过点 $F(1, 0)$ 作直线 l 交曲线 E 于 P, Q 两点,且点 P 位于 x 轴上方,记直线 A_1Q, A_2P 的斜率分别为 k_1, k_2 .

①证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值;

②设点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q_1 , 求 $\triangle PFQ_1$ 面积的最大值.

高三数学试题第4页(共4页)