

参照秘密级管理★启用并使用完毕前

## 部分学校高三阶段性诊断考试试题

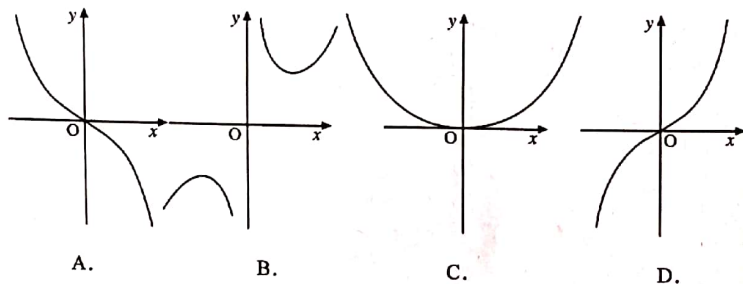
## 数 学

## 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每个小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | -2 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | y = \sqrt{x}\}$ , 那么  $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B =$   
A.  $(-2, 1)$  B.  $(-2, 0)$  C.  $(-\infty, 1)$  D.  $(-\infty, 0)$
2. 若复数  $z = \frac{1-2i}{i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$   
A.  $\sqrt{5}$  B. 2 C.  $\sqrt{3}$  D. 1
3. 已知  $\{a_n\}$  为等比数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 若  $2S_3 = a_2 + a_3 + a_4$ , 则公比  $q =$   
A.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  B.  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  C. 1 D. 2
4. 若圆台的上、下底面面积分别为 4, 16, 则圆台中截面的面积为  
A. 10 B. 8 C. 9 D.  $8\sqrt{2}$
5. 函数  $f(x) = (e^x + e^{-x}) \tan x$  的部分图像大致为



6. 若  $\tan \alpha > \sin \alpha > \sin 2\alpha$  ( $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 则  $\alpha \in$

A.  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$  B.  $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  C.  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  D.  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

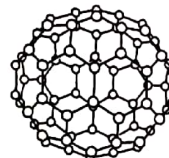
7. 已知  $a, b$  为正实数, 则 “ $\frac{ab}{a+b} \leq 2$ ” 是 “ $ab \leq 16$ ” 的

A. 充要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 碳 70 ( $C_{70}$ ) 是一种碳原子簇, 可高效杀灭癌细胞, 它是由

70 个碳原子构成的, 其结构是由五元环 (正五边形面) 和六元环 (正六边形面) 组成的封闭的凸多面体, 共 37 个面, 则其六元环的个数为

A. 12 B. 25  
C. 30 D. 36

C<sub>70</sub> 分子结构模型

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面,  $m, n$  是两条不同的直线, 且  $m, n \not\subset \alpha$ ,  $m, n \not\subset \beta$ , 给出下列四个论断: ①  $\alpha \parallel \beta$ ; ②  $m \parallel n$ ; ③  $m \parallel \alpha$ ; ④  $n \parallel \beta$ . 以其中三个论断为条件, 剩余论断为结论组成四个命题, 其中正确的命题是

A. ①②③  $\Rightarrow$  ④ B. ①③④  $\Rightarrow$  ② C. ①②④  $\Rightarrow$  ③ D. ②③④  $\Rightarrow$  ①

10. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的左、右焦点为  $F_1, F_2$ ,  $P$  是  $C$  上的动点, 则下列结论正确的是

A. 离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$  B.  $|PF_2|$  的最大值为 3  
C.  $\triangle PF_1F_2$  面积的最大值为  $2\sqrt{3}$  D.  $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|$  的最小值为 2

11. 已知  $e$  是自然对数的底数, 则下列不等关系中不正确的是

A.  $\ln 2 > \frac{2}{e}$  B.  $\ln 3 < \frac{3}{e}$  C.  $\ln \pi > \frac{\pi}{e}$  D.  $\frac{\ln 3}{\ln \pi} < \frac{3}{\pi}$

12. 记  $\langle x \rangle$  表示与实数  $x$  最接近的整数, 数列  $\{a_n\}$  通项公式为  $a_n = \frac{1}{\langle \sqrt{n} \rangle}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),

其前  $n$  项和为  $S_n$ . 设  $k = \langle \sqrt{n} \rangle$ , 则下列结论正确的是

A.  $\sqrt{n} = k - \frac{1}{2}$  B.  $\sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$  C.  $n \geq k^2 - k + 1$  D.  $S_{2021} = 88$



三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ ，则向量  $\vec{a}-\vec{b}$  和  $\vec{b}$  的夹角为\_\_\_\_\_。

14. 某班40名学生，在一次考试中统计所得平均分为80分，方差为70，后来发现有两名同学的成绩有误，甲实得80分错记为60分，乙实得70分错记为90分，则更正后的方差为\_\_\_\_\_。

15. 已知  $(1+x)^m + (1+3x)^n (m, n \in \mathbf{N}^*)$  展开式中  $x$  的系数为11，当  $x^2$  的系数取最小值时， $x^4$  的系数是\_\_\_\_\_。

16. 已知  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点， $c$  是双曲线  $C$  的半焦距，点  $A$  是圆  $O: x^2 + y^2 = c^2$  上一点，线段  $F_2A$  交双曲线  $C$  的右支于点  $B$ ，且有  $|F_2A| = a, \overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AF_2}$ ，则双曲线  $C$  的离心率是\_\_\_\_\_。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 在①  $S_5 = 50$ ，②  $S_1, S_2, S_3$  成等比数列，③  $S_6 = 3(a_6 + 2)$ ，这三个条件中任选两个，补充到下面问题中，并解答本题。

问题：已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d (d \neq 0)$ ，前  $n$  项和为  $S_n$ ，且满足\_\_\_\_\_。

(1) 求  $a_n$ ；

(2) 若  $b_n - b_{n-1} = 2a_n (n \geq 2)$ ，且  $b_1 - a_1 = 1$ ，求数列  $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

注：如果选择多种情况分别解答，按第一种解答计分。

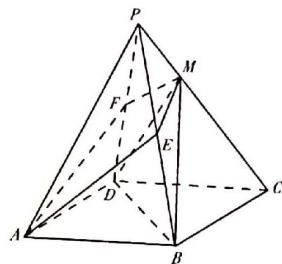
18. (12分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$ ，

设  $\vec{m} = (b, c)$ ， $\vec{n} = (a, b)$ ，且  $\vec{m} \perp \vec{n}$ 。

(1) 求角  $B$  的大小；

(2) 延长  $BC$  至  $D$ ，使  $BD = 5$ ，若  $\triangle ACD$  的面积  $S = \sqrt{3}$ ，求  $AD$  的长。

19. (12分) 如图所示，已知在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是边长为2的菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，侧棱  $PA = PC = 3, PB = PD$ ，过点  $A$  的平面与侧棱  $PB, PD, PC$  相交于点  $E, F, M$ ，且满足： $PE = PF, PM = 1$ 。



(1) 求证：直线  $PC \perp$  平面  $AEMF$ ；

(2) 求平面  $MDB$  与平面  $AEMF$  所成二面角的正弦值。

20. (12分) 某市在司法知识宣传周活动中，举办了一场司法知识网上答题考试。要求本市所有机关、企事业单位工作人员均要参加考试。试题满分为100分，考试成绩大于等于90分的为优秀。考试结束后，组织部门从所有参加考试的人员中随机抽取了200人的成绩作为统计样本，得到样本平均数为82、方差为64。假设该市机关、企事业单位工作人员有20万人，考试成绩  $\xi$  服从正态分布  $N(82, 64)$ 。

(1) 估计该市此次司法考试成绩优秀者的人数有多少万人？

(2) 该市组织部门为调动机关、企事业单位工作人员学习司法知识的积极性，制定了如下奖励方案：所有参加考试者，均可参与网上“抽奖赢手机流量”活动，并且成绩优秀者可有两次抽奖机会，其余参加者抽奖一次。抽奖者点击抽奖按钮，即随机产生一个两位数(10, 11, ..., 99)，若产生的两位数的数字相同，则可获赠手机流量5G，否则获赠手机流量1G。假设参加考试的所有人均参加了抽奖活动，试估计此次抽奖活动赠予的手机流量总共有多少G？

参考数据：若  $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) \approx 0.68$ 。

21. (12分) 已知函数  $f(x) = |\ln x| + ax (a < 0)$ 。

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性；

(2) 若函数  $f(x)$  恰好有三个零点，求  $a$  的取值范围。

22. (12分) 已知抛物线  $\Omega$  的标准方程是  $x^2 = 2py (p > 0)$ ，过点  $M(0, 2p)$  的直线  $l$  与抛物线  $\Omega$  相交于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  两点，且满足  $y_1 \cdot y_2 = 64$ 。

(1) 求抛物线  $\Omega$  的标准方程及准线方程；

(2) 设垂直于  $l$  的直线  $l_1$  和抛物线  $\Omega$  有两个不同的公共点  $C, D$ ，当  $C, D$  均在以线段  $AB$  为直径的圆上时，求直线  $l$  的斜率。

