

高三数学试题

2021.4

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,第Ⅰ卷1—3页,第Ⅱ卷3—6页,共150分,测试时间120分钟.

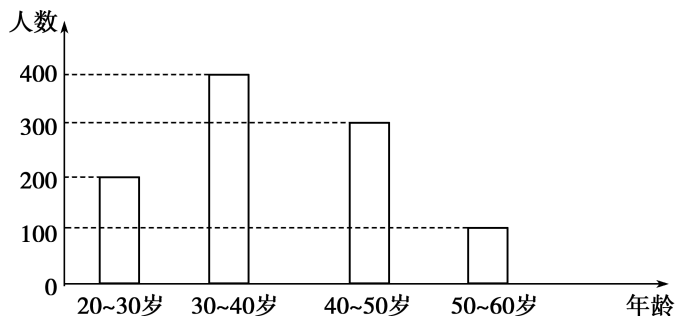
注意事项:

选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在测试卷上.

第Ⅰ卷(共60分)

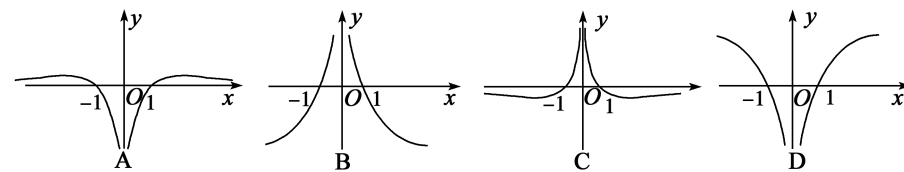
一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知命题 $p: \forall x > 0, \ln(x+1) > 0$, 则 $\neg p$ 为
A. $\forall x > 0, \ln(x+1) \leq 0$ B. $\exists x > 0, \ln(x+1) \leq 0$
C. $\forall x < 0, \ln(x+1) \leq 0$ D. $\exists x \leq 0, \ln(x+1) \leq 0$
2. 已知集合 $A = \{x | -2 < 1-x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x^2 \leq 6x\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$
A. $(3, 6]$ B. $(2, 6]$ C. $\{3, 4, 5, 6\}$ D. $\{4, 5, 6\}$
3. 6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者,每名同学只去1个场馆,甲场馆安排3名,乙场馆安排1名,丙场馆安排2名,则不同的安排方法共有
A. 120种 B. 90种 C. 80种 D. 60种
4. 2021年我国推进新冠疫苗全人群免费接种,某小区年龄分布如下图所示,现用分层抽样的方法从该小区所有人中抽取60人进行抗体检测,则从40岁至50岁之间的人群中抽取人数为



- A. 18 B. 24 C. 5 D. 9

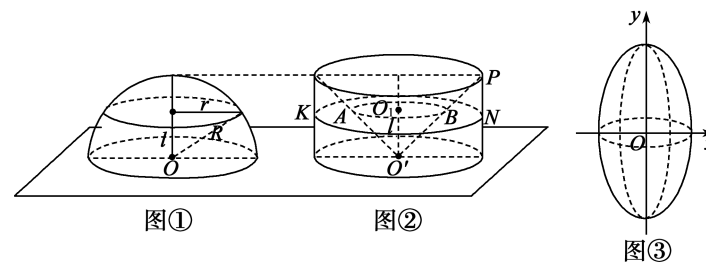
5. 函数 $f(x) = \frac{2^{x+1} \cdot \ln|x|}{4^x + 1}$ 的部分图像大致为



6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$, $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{6}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} =$

- A. -9 B. $-\frac{9}{2}$ C. -7 D. $-\frac{7}{2}$

7. 运用祖暅原理计算球的体积时, 夹在两个平行平面之间的两个几何体, 被平行于这两个平面的任意一个平面所截, 若截面面积都相等, 则这两个几何体的体积相等. 构造一个底面半径和高都与球的半径相等的圆柱, 与半球(如图①)放置在同一平面上, 然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底面的圆锥后得到一新几何体(如图②), 用任何一个平行于底面的平面去截它们时, 可证得所截得的两个截面面积相等, 由此可证明新几何体与半球体积相等. 现将椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 y 轴旋转一周后得一橄榄状的几何体(如图③), 类比上述方法, 运用祖暅原理可求得其体积等于



- A. 8π B. 16π C. 24π D. 32π

8. 已知定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且满足 $f(-1) = -2$, 则关于 x 的不等式 $f(x) < \frac{2}{x} + \sin \pi x$ 的解集为

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

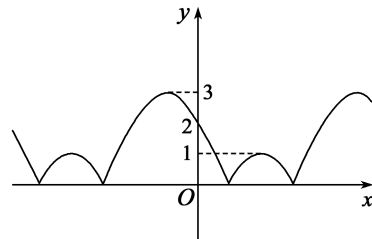
二、多选题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分)

9. 已知复数 $z_1 = \frac{2}{-1+i}$ (i 为虚数单位),下列说法正确的是

- A. z_1 对应的点在第三象限
- B. z_1 的虚部为 -1
- C. $z_1^4 = 4$
- D. 满足 $|z| = |z_1|$ 的复数 z 对应的点在以原点为圆心,半径为 2 的圆上

10. 已知函数 $f(x) = A \cos(x + \varphi) + 1$ ($A > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$),若函数 $y = |f(x)|$ 的部分图像如图所示,则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
- B. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{5}{6}\pi, 1)$ 对称
- C. 将函数 $y = 2\sin x + 1$ 的图像向左平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位可得函数 $f(x)$ 的图像
- D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域为 $[\sqrt{3} + 1, 3]$



11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < \sqrt{5}$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 P 在椭圆上,点 Q 是圆 $x^2 + (y-4)^2 = 1$ 关于直线 $x-y=0$ 对称的曲线 E 上任意一点,若 $|PQ| - |PF_2|$ 的最小值为 $5 - 2\sqrt{5}$,则下列说法正确的是

- A. 椭圆 C 的焦距为 2
- B. 曲线 E 过点 F_2 的切线斜率为 $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. 若 A, B 为椭圆 C 上关于原点对称的异于顶点和点 P 的两点,则直线 PA 与 PB 斜率之积为 $-\frac{1}{5}$
- D. $|PQ| + |PF_2|$ 的最小值为 2

12. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,则

- A. $f(2) > f(5)$
- B. 若 $f(x) = m$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 ,则 $x_1 x_2 < e^2$
- C. $\ln 2 > \sqrt{\frac{2}{e}}$
- D. 若 $2^x = 3^y, x, y$ 均为正数,则 $2x > 3y$

第 II 卷(共 90 分)

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,且 $P(X > 5) = P(X < -1) = 0.2$,则 $P(-1 < X < 2) =$ _____.

14. 若 $n \in \mathbf{Z}$,且 $3 \leq n \leq 6$,则 $(x + \frac{1}{x^3})^n$ 的展开式中的常数项为_____.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC, \triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$,则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为_____,球 O 的表面积为_____.

16. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P 是双曲线上任意一点,过 F_2 作 $\angle F_1 P F_2$

平分线的垂线,垂足为 N ,则点 N 到直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 的距离的取值范围是_____.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在① $2S_n + 1 = 3^n$;② $a_1 a_2 \cdots a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2}}$;③ $2S_n - 3a_n + 1 = 0$.

这三个条件中任选一个,补充在下面问题中并作答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $a_1 = 1$,且满足_____,设数列

$\left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{(n+1) \cdot \log_3 a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求 T_n ,并证明 $T_n < \frac{5}{2}$.

(注:如果选择多个条件分别解答,则按第一个解答计分)

18. (本小题满分 12 分)

在锐角三角形 ABC 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $6\cos^2(\frac{\pi}{2} + A) + \cos A = 5$.

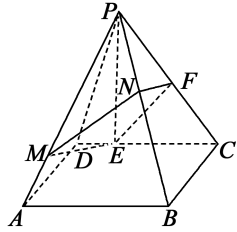
(1)求 A ;

(2)若 $a = 2$,求 $b^2 + c^2$ 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形且 $AB=4,BC=3$,点 P 在底面上的射影为 $E,PE=EC$,且 $DE=1,M$ 为 AP 上的一点且 $AM:MP=1:3$,过 E,M 做平面交 PB 于点 N,PC 于点 F 且 F 为 PC 的中点.

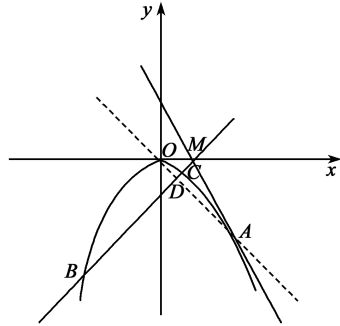
- (1)证明: $ME \parallel$ 平面 PBC ;
(2)求平面 PAD 与平面 $EMNF$ 所成角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $E:x^2=-2y$,过抛物线上第四象限的点 A 作抛物线的切线,与 x 轴交于点 M .过 M 做 OA 的垂线,交抛物线于 B,C 两点,交 OA 于点 D .

- (1)求证:直线 BC 过定点;
(2)若 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \geq 2$,求 $|AD| \cdot |AO|$ 的最小值.



21. (本小题满分 12 分)

2020 年 1 月 15 日教育部制定出台了《关于在部分高校开展基础学科招生改革试点工作的意见》(也称“强基计划”),《意见》宣布:2020 年起不再组织开展高校自主招生工作,改为实行强基计划,强基计划主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生,据悉强基计划的校考由试点高校自主命题,校考过程中通过笔试后才能进入面试环节.

(1)为了更好的服务于高三学生,某研究机构对随机抽取的 5 名高三学生的记忆力 x 和判断力 y 进行统计分析,得到下表数据

x	6	8	9	10	12
y	2	3	4	5	6

请用相关系数说明该组数据中 y 与 x 之间的关系可用线性回归模型进行拟合,并求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

(2)现有甲、乙两所大学的笔试环节都设有三门考试科目且每门科目是否通过相互独立,若某考生报考甲大学,每门笔试科目通过的概率均为 $\frac{2}{5}$,该考生报考乙大学,每门笔试科目通过的概率依次为 $m, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$,其中 $0 < m < 1$,根据规定每名考生只能报考强基计划的一所试点高校,若以笔试过程中通过科目数的数学期望为依据作出决策,求该考生更希望通过乙大学笔试时 m 的取值范围.

参考公式:

①线性相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$,一般地,相关系数 r 的绝对值在

0.95 以上(含 0.95)认为线性相关性较强;否则,线性相关性较弱.

②对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,其回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x \ln x+mx$,且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 1.

- (1)求实数 m 的值;
(2)设 $g(x)=\frac{af(x)}{x}+x^2-8x(a \in \mathbf{R})$ 在定义域内有两个不同的极值点 x_1, x_2 ,求实数 a 的取值范围;
(3)在(2)的条件下,令 $x_1 < x_2$ 且 $x_1 \neq 1$,总有 $(t-2)(4+3x_1-x_1^2) < \frac{a \ln x_1}{1-x_1}$ 成立,求实数 t 的取值范围.

高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. B 2. C 3. D 4. A 5. A 6. B 7. B 8. C

二、多选题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分)

9. AB 10. BC 11. BC 12. AD

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 0.3 14. 4 15. $\frac{\sqrt{2}}{3}, 6\pi$ 16. $[1, 3]$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 解:选① $2S_n + 1 = 3^n$

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} + 1 = 3^{n-1}$

两式相减得 $2a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 3^{n-1}$ 2 分

又 $a_1 = 1$ 满足上式,故 $a_n = 3^{n-1}$ 4 分

令 $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{(n+1)\log_3 a_{n+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{(n+1)\log_3 3^n}$
 $= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 6 分

$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
 $= \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
 $= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + 1 - \frac{1}{n+1}$ 8 分

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{n+1}$ 9 分

因为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > 0, \frac{1}{n+1} > 0$, 所以 $T_n < \frac{5}{2}$ 10 分

选② $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

当 $n \geq 2$ 时, $a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 3^{\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}}$

两式相除得 $a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2} - \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}} = 3^{n-1}$ 2 分

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 满足上式

故 $a_n = 3^{n-1}$ 4 分

以下同选①

选③ $2S_n - 3a_n + 1 = 0$

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} - 3a_{n-1} + 1 = 0$

两式相减得 $2a_n - 3a_n + 3a_{n-1} = 0$

所以 $a_n = 3a_{n-1}$ 2 分

又 $a_1 = 1$ 所以 $a_n \neq 0$

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$

即 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 3 为公比的等比数列, 故 $a_n = 3^{n-1}$ 4 分
以下同选①.

18. 解: (1) 由题意得 $6 \sin^2 A + \cos A = 5$ 1 分

整理得 $6 \cos^2 A - \cos A - 1 = 0$, 解得 $\cos A = \frac{1}{2}$ 或 $\cos A = -\frac{1}{3}$ 3 分

又 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

(2) 方法一: 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $4 = b^2 + c^2 - bc$ 即 $b^2 + c^2 = 4 + bc$ 5 分
由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

即 $b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B, c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin C$ 6 分

$$\begin{aligned} bc &= \frac{16}{3} \sin B \sin C = \frac{16}{3} \sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin B \cos B + \frac{8}{3} \sin^2 B \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin 2B - \frac{4}{3} \cos 2B + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4}{3} \end{aligned}$$
 8 分

$$\text{又 } \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2}{3}\pi - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{解得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$$
 9 分

$$\text{所以 } \frac{\pi}{6} < 2B - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{所以 } \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\text{即 } bc \in \left(\frac{8}{3}, 4\right] \text{ 11 分}$$

$$\text{所以 } b^2 + c^2 = 4 + bc \in \left(\frac{20}{3}, 8\right] \text{ 12 分}$$

方法二: 由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

即 $b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B, c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin C$ 5 分

$$b^2 + c^2 = \frac{16}{3} \sin^2 B + \frac{16}{3} \sin^2 C$$

$$= \frac{16}{3} \left(\frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} \right)$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} (\cos 2B + \cos 2C) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为 $A = \frac{\pi}{3}$ 所以 $B + C = \frac{2}{3}\pi$, 即 $2C = \frac{4\pi}{3} - 2B \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以 $b^2 + c^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} [\cos 2B + \cos(\frac{4\pi}{3} - 2B)]$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} (\cos 2B - \frac{1}{2} \cdot \cos 2B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B)$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} (\frac{1}{2} \cos 2B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B)$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \cos(2B + \frac{\pi}{3}) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2}{3}\pi - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 即 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

所以 $2B + \frac{\pi}{3} \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

故 $\cos(2B + \frac{\pi}{3}) \in [-1, -\frac{1}{2}) \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $b^2 + c^2 \in (\frac{20}{3}, 8] \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (1) 证明: 法一: 取 AB 的四等分点 G , 使 $AG = 1$, 连接 MG, EG

则 $\frac{AM}{MP} = \frac{AG}{GB} = \frac{1}{3}$

所以 $MG \parallel PB$

又因为 $EC \parallel BG$

所以 $GE \parallel BC \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又因为 $PB \cap BC = B, GE \cap MG = G$

所以平面 $MGE \parallel$ 平面 PBC

因为 $ME \subset$ 平面 MGE

所以 $ME \parallel$ 平面 $PBC \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

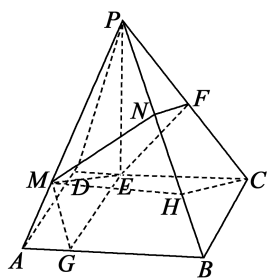
法二: 取 PB 的四等分点 H , 使 $\frac{BH}{HP} = \frac{1}{3}$

连接 MH, CH

则 $\frac{AM}{MP} = \frac{BH}{HP} = \frac{1}{3}$ 所以 $MH \parallel \frac{3}{4}AB$

又因为 $EC \parallel \frac{3}{4}AB$ 所以 $MH \parallel EC$

所以四边形 $MHCE$ 为平行四边形 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$



所以 $ME \parallel CH$

又因为 $ME \not\subset$ 平面 $PBC, CH \subset$ 平面 PBC

所以 $ME \parallel$ 平面 $PBC \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 如图所示, 建立空间直角坐标系

则 $A(3, -1, 0), D(0, -1, 0), P(0, 0, 3)$

$E(0, 0, 0), M(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), F(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

所以 $\overrightarrow{AD} = (-3, 0, 0), \overrightarrow{DP} = (0, 1, 3)$

$\overrightarrow{EM} = (\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), \overrightarrow{EF} = (0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设平面 PAD 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot m = -3x_1 = 0 \\ \overrightarrow{DP} \cdot m = y_1 + 3z_1 = 0 \end{cases}$ 令 $x_1 = 0, z_1 = -1$

得平面 PAD 的一个法向量为 $m = (0, 3, -1) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

设平面 $EMNF$ 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{EM} \cdot n = \frac{9}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2 + \frac{3}{4}z_2 = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot n = \frac{3}{2}y_2 + \frac{3}{2}z_2 = 0 \end{cases}$ 令 $z_2 = -1$

得平面 $EMNF$ 的一个法向量为 $n = (\frac{2}{3}, 1, -1) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

所以 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{3+1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{22}{9}}} = \frac{6\sqrt{55}}{55} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以平面 PAD 与平面 $EMNF$ 所成角的余弦值为 $\frac{6\sqrt{55}}{55} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 解: (1) 因为 $x^2 = -2y$, 所以 $y' = -x \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

设 $A(2t, -2t^2) (t > 0)$, 则 $k_{AM} = y' \Big|_{x=2t} = -2t$

所以 $l_{AM}: y + 2t^2 = -2t(x - 2t)$, 即 $y = -2tx + 2t^2 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $M(t, 0) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又 $k_{OA} = \frac{-2t^2}{2t} = -t$, 所以 $k_{BC} = \frac{1}{t}$, 所以 $l_{BC}: y - 0 = \frac{1}{t}(x - t)$,

即 $y = \frac{1}{t}x - 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

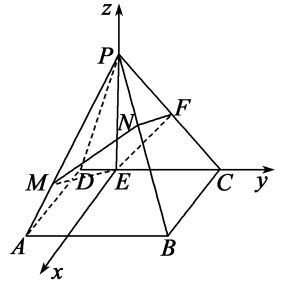
所以直线 BC 过定点 $(0, -1) \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 联立方程 $\begin{cases} y = \frac{1}{t}x - 1 \\ x^2 = -2y \end{cases}$, 得 $x^2 + \frac{2}{t}x - 2 = 0 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{2}{t}, x_1x_2 = -2 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

则 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (x_1 - t, y_1) \cdot (x_2 - t, y_2) = (x_1 - t)(x_2 - t) + y_1y_2$

$$= x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 = 1 + t^2 \geq 2, \text{ 所以 } t \geq 1 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



又 $|AD| = \frac{|\frac{1}{t} \cdot 2t + 2t^2 - 1|}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot t$ 9 分

$|AO| = \sqrt{(2t)^2 + (2t^2)^2} = 2t\sqrt{1 + t^2}$ 10 分

所以 $|AD| \cdot |AO| = \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot t \cdot 2t \cdot \sqrt{1 + t^2} = (2t^2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ 11 分

因为 $2t^2 \geq 2$, 所以当 $2t^2 = 2$, 即 $t = 1$ 时, $|AD| \cdot |AO|$ 的最小值是 6 12 分

21. 解: (1) $\bar{x} = \frac{6+8+9+10+12}{5} = 9$

$\bar{y} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$ 1 分

$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 12 + 24 + 36 + 50 + 72 = 194$

$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 36 + 64 + 81 + 100 + 144 = 425$

$\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90$ 2 分

相关系数 $r = \frac{194 - 5 \times 9 \times 4}{\sqrt{(425 - 5 \times 81)(90 - 5 \times 16)}}$

$= \frac{14}{10\sqrt{2}} \approx 0.99 > 0.95$, 故 y 与 x 之间的关系可用线性回归模型进行拟合 3 分

$\hat{b} = \frac{194 - 5 \times 9 \times 4}{425 - 5 \times 81} = 0.7$ 4 分

$\hat{a} = 4 - 9 \times 0.7 = -2.3$

综上回归直线方程 $\hat{y} = -2.3 + 0.7x$ 5 分

(2) 通过甲大学的考试科目数 $X \sim B(3, \frac{2}{5})$, 则 $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ 6 分

设通过乙大学的考试科目数为 Y , 则 Y 可能的取值为 0, 1, 2, 3 7 分

$P(Y=0) = (1-m)(1-\frac{1}{4})(1-\frac{2}{3}) = \frac{1}{4}(1-m)$

$P(Y=1) = m(1-\frac{1}{4})(1-\frac{2}{3}) + (1-m) \times \frac{1}{4} \times (1-\frac{2}{3}) + (1-m) \times (1-\frac{1}{4}) \times \frac{2}{3}$

$= \frac{7}{12} - \frac{1}{3}m$ 8 分

$P(Y=2) = m \times \frac{1}{4} \times (1-\frac{2}{3}) + m \times (1-\frac{1}{4}) \times \frac{2}{3} + (1-m) \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{5}{12}m$ 9 分

$P(Y=3) = m \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}m$

$E(Y) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3}m + 2(\frac{1}{6} + \frac{5}{12}m) + 3 \times \frac{1}{6}m = \frac{11}{12} + m$ 10 分

因为该考生更希望通过乙大学的笔试考试, 所以 $E(Y) > E(X)$, 即 $\frac{11}{12} + m > \frac{6}{5}$ 11 分

又 $0 < m < 1$, 解得 $\frac{17}{60} < m < 1$

即为该考生更希望通过乙大学的笔试时 m 的范围为 $(\frac{17}{60}, 1)$ 12 分

22. 解: (1) 由题意: $f'(x) = \ln x + 1 + m$ 1 分

所以 $f'(1) = 1 + m$

所以 $m = 0$ 2 分

(2) 由 (1) 知: $f(x) = x \ln x$,

所以 $g(x) = a \ln x + x^2 - 8x$, $g'(x) = \frac{a}{x} + 2x - 8 = \frac{2x^2 - 8x + a}{x} (x > 0)$ 3 分

令 $u(x) = 2x^2 - 8x + a (x > 0)$

函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个极值点, 则 $u(x) = 2x^2 - 8x + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实根 x_1, x_2 4 分

所以 $\begin{cases} \Delta = 64 - 8a > 0 \\ x = 2 > 0 \\ u(0) = a > 0 \end{cases}$, 5 分

解得 $0 < a < 8$ 6 分

(3) 由 (2) 知 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = \frac{a}{2}$, $0 < x_1 < x_2$

所以 $x_2 = 4 - x_1 > x_1$ 得 $0 < x_1 < 2$, 7 分

$a = 2x_1 x_2 = 2x_1(4 - x_1)$

所以 $(t-2)(4 + 3x_1 - x_1^2) < \frac{a \ln x_1}{1 - x_1}$ 成立, 即 $(t-2)(4 + 3x_1 - x_1^2) < \frac{2x_1(4 - x_1) \ln x_1}{1 - x_1}$

即 $(t-2)(x_1 + 1) < \frac{2x_1 \ln x_1}{1 - x_1}$, 即 $\frac{x_1}{1 - x_1} [2 \ln x_1 + \frac{(t-2)(x_1^2 - 1)}{x_1}] > 0$ 成立

且 $0 < x_1 < 1$ 时, $\frac{x_1}{1 - x_1} > 0$, $1 < x_1 < 2$ 时, $\frac{x_1}{1 - x_1} < 0$ 8 分

令 $h(x) = 2 \ln x + \frac{(t-2)(x^2 - 1)}{x} (0 < x < 2)$,

$h'(x) = \frac{(t-2)x^2 + 2x + (t-2)}{x^2} (0 < x < 2)$ 9 分

① $t \geq 2$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上为增函数, 且 $h(1) = 0$

所以 $x \in (1, 2)$ 时, $h(x) > 0$, 不符合题意. 10 分

② $t < 2$ 时, 令 $p(x) = (t-2)x^2 + 2x + t - 2$, $\Delta = 4 - 4(t-2)^2$

(i) 当 $\Delta \leq 0$ 即 $t \leq 1$ 时, $h'(x) \leq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上为减函数

且 $h(1) = 0$, 可得: $0 < x < 1$ 时, $h(x) > 0$, $1 < x < 2$ 时, $h(x) < 0$

所以 $\frac{x}{1-x} [2 \ln x + \frac{(t-2)(x^2 - 1)}{x}] > 0$ 成立 11 分

(ii) 当 $\Delta > 0$ 即 $1 < t < 2$ 时, 函数 $p(x)$ 对称轴 $x = \frac{1}{2-t} > 1$

且 $p(1) = 2t - 2 > 0$, 令 $x_0 = \min\{\frac{1}{2-t}, 2\}$

则 $x \in (1, x_0)$ 时, $p(x) > 0$, 即 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, x_0)$ 为增函数,

且 $h(1) = 0$, 所以 $h(x) > 0$, 不符合题意.

综上: $t \leq 1$ 12 分