

山东省 2021 届高三开学质量检测

数学参考答案

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. B 2. D 3. A 4. B 5. B 6. C 7. A 8. D

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分。

9. CD 10. BCD 11. BD 12. ACD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 9 14. $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$ 15. 3 16. $2\sqrt{3}-\frac{(10-4\sqrt{3})}{3}\pi$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解:(1)当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$, 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n-[\frac{3}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)]=3n-2$, 3 分

将 $n=1$ 代入上式验证显然适合,所以 $a_n=3n-2$ 4 分

(2)因为 $a_4=10, a_{34}=100, a_{334}=1\ 000, a_{3\ 334}=10\ 000$, 5 分

所以 $b_n=\begin{cases} 0, 1 \leq n \leq 3 \\ 1, 4 \leq n \leq 33 \\ 2, 34 \leq n \leq 333 \\ 3, 334 \leq n \leq 1\ 000 \end{cases}$ 9 分

所以 $T_{1\ 000}=0 \times 3 + 1 \times 30 + 2 \times 300 + 3 \times 667 = 2\ 631$ 10 分

18. 解:选①由正弦定理得 $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\cos B + 1}{\sqrt{3} \sin A}$, 1 分

$\because \sin A \neq 0, \therefore \sqrt{3} \sin B - \cos B = 1$, 2 分

即 $\sin(B - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 4 分

$\because 0 < B < \pi, \therefore -\frac{\pi}{6} < B - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

$\therefore B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \therefore B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

选② $\because 2b \sin A = a \tan B, 2b \sin A = \frac{a \sin B}{\cos B}$, 1 分

由正弦定理可得 $2 \sin B \sin A = \sin A \cdot \frac{\sin B}{\cos B}$, 2 分

$\because \sin A \neq 0, \therefore \cos B = \frac{1}{2}$, 4 分

$\because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

选③ $\because \sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$, 1 分

由已知结合正弦定理可得 $(a-c)a+c^2=b^2$, 2 分

$\therefore a^2+c^2-b^2=ac$,

$\therefore \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$, 4 分

$\because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}$, 6 分

(2) $\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 3ac = 16 - 3ac$, 即 $3ac = 16 - b^2$, 8 分

$\therefore 16 - b^2 \leq 3(\frac{a+c}{2})^2$, 解得 $b \geq 2$, 当且仅当 $a=c=2$ 时取等号, 10 分

$\therefore b_{\min} = 2$, $\triangle ABC$ 周长的最小值为 6, 此时 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \sqrt{3}$ 12 分

19. 解: 以 D 为坐标原点, 射线 DA 为 x 轴的正半轴, 建立如图所示的空间直角坐标系

$D-xyz$,

由 $AB \parallel DC, AD \perp DC, AB=1, DC=2, \angle BCD=45^\circ$, 易知 $AD=1$.

则 $A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,2,0), D(0,0,0), H(0,0,2), F(1,1,1)$ 1 分

(1) 设 $M(0,t,0)$, 因为 $AM \perp$ 平面 $FBDH$, 所以 $AM \perp BD$,

$\overrightarrow{AM} = (-1, t, 0), \overrightarrow{BD} = (-1, -1, 0)$ 3 分

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 - t = 0$, 解得 $t = 1$, 所以线段 DM 的长度为 1. 5 分

(2) 设 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ 是平面 HAM 的一个法向量, $\overrightarrow{AH} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{MF} = (1, 0, 1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$, 可取 $\mathbf{n}_1 = (2, 2, 1)$, 7 分

同理, 设 $\mathbf{n}_2 = (u, v, w)$ 是平面 AMF 的一个法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{MF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases}$, 可取 $\mathbf{n}_2 = (1, 1, -1)$ 9 分

则 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 11 分

显然二面角 $H-AM-F$ 为锐二面角, 所以二面角 $H-AM-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 由散点图可知选择 $y = c \cdot d^x$, 1 分

由 $y = c \cdot d^x$ 两边同时取常用对数得 $\lg y = \lg c + \lg d \cdot x$, 2 分

设 $\lg y = w$, $\therefore w = \lg c + \lg d \cdot x$.

计算 $\bar{x} = 4, \bar{w} = 1.54, \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$, 3 分

$\lg \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i w_i - 7 \bar{x} \bar{w}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7 \bar{x}^2} = \frac{50.12 - 7 \times 4 \times 1.54}{140 - 7 \times 4^2} = \frac{7}{28} = 0.25$, 5 分

把样本中心点 $(4, 1.54)$ 代入 $w = \lg c + \lg d \cdot x$ 得 $\lg \hat{c} = 0.54$ 6 分

$\therefore \hat{w} = 0.54 + 0.25x$,

$\therefore y$ 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 3.47 \times 10^{0.25x}$ 7 分

(2) 这 1 000 份样本中检测呈阳性的份数为 X ,

则每份检测出阳性的概率 $P = 0.7 \times 0.99 = 0.693$, 9 分

由题意可知 $X \sim B(1\ 000, 0.693)$, $\therefore E(X) = 1\ 000 \times 0.693 = 693$ (人), 11 分

故这 1 000 份样本中检测呈阳性份数的期望为 693 人. 12 分

21. 解: (1) 由题意 $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, b = c$, 结合 $a^2 - b^2 = c^2$, 解得 $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 证明: ① 当直线 l 斜率不存在时, 设直线 $l: x = m, A(m, y_m), B(m, -y_m)$,

$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_m - 1}{m - 2} \cdot \frac{-y_m - 1}{m - 2} = 1$,

解得 $m = 2$ (舍) 或 $m = 6$ (舍), 故不满足. 5 分

② 当直线 l 斜率存在时, 设 $l: y = kx + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{整理得} (2k^2+1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 6 = 0.$$

$$\Delta = 8(6k^2 - t^2 + 3) > 0, x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{2k^2+1}, x_1 x_2 = \frac{2t^2-6}{2k^2+1}. \text{①} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{则 } k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_1-1}{x_1-2} \cdot \frac{y_2-1}{x_2-2} = \frac{y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = 1,$$

$$\therefore (k^2-1)x_1 x_2 + (tk-k+2)(x_1+x_2) + t^2 - 2t - 3 = 0, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{将①代入上式可得 } 12k^2 + 8kt + t^2 + 2t - 3 = 0, \therefore (2k+t-1) \cdot (6k+t+3) = 0, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

若 $2k+t-1=0, t=1-2k$, 直线 l 经过 P 点与已知矛盾,

若 $6k+t+3=0, t=-3-6k, \Delta = -48(5k^2+6k+1)$ 存在 k 使得 $\Delta > 0$ 成立.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=k(x-6)-3$,

故直线 l 过定点 $(6, -3)$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 解: (1) $f(x)$ 的定义域 $(0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x} + m, \dots\dots\dots 1 \text{分}$

若 $m \geq 0, f'(x) > 0, f(x)$ 在定义域内单调递增, 无最大值; $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

若 $m < 0, x \in (0, -\frac{1}{m}), f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增; $x \in (-\frac{1}{m}, +\infty), f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

所以 $x = -\frac{1}{m}$ 时 $f(x)$ 取得最大值 $\ln(-\frac{1}{m}) = 0$, 所以 $m = -1. \dots\dots\dots 3 \text{分}$

$$f'(e) = \frac{1}{e} - 1, f(e) = 2 - e.$$

函数 $f(x)$ 的图象在 $x=e$ 处的切线方程 $y = (\frac{1}{e} - 1)x + 1. \dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 原式子恒成立, 即 $m+1 \leq e^x - \frac{\ln x + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

$$\text{设 } \varphi(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x}, \varphi'(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}, \text{设 } Q(x) = x^2 e^x + \ln x,$$

$$Q'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0, \text{所以 } Q(x) \text{ 在其定义域内单调递增, 且 } Q(\frac{1}{2}) < 0, Q(1) > 0,$$

所以 $Q(x)$ 有唯一零点 $x_0, \dots\dots\dots 8 \text{分}$

$$\text{而且 } x_0^2 \cdot e^{x_0} + \ln x_0 = 0, \text{所以 } x_0 \cdot e^{x_0} = \frac{-\ln x_0}{x_0},$$

$$\text{两边同时取对数得 } x_0 + \ln x_0 = \ln(-\ln x_0) + (-\ln x_0),$$

易证明函数 $y = x + \ln x$ 是增函数, 所以得 $x_0 = -\ln x_0$, 所以 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$

所以由 $\varphi(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \varphi(x) \geq \varphi(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{-x_0 + 1}{x_0} = 1, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

于是 m 的取值范围是 $(-\infty, 0]$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$