

2021 届高三开学摸底联考 新高考卷
数 学 试 卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{2i}{1-i}$ 的虚部为

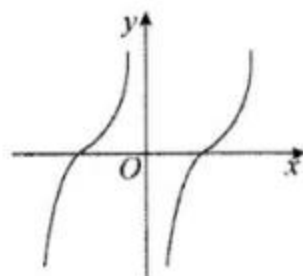
- A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知集合 $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y | 0 < y < 10\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集个数为

- A. 32 B. 31 C. 16 D. 15

3. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的解析式可能为

- A. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ B. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$
C. $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$ D. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$



4. 已知平面 α , 直线 l, m, n , 满足 $m // \alpha, n // \alpha$, 且 m, n 互为异面直线, 则“ $l \perp m$ 且 $l \perp n$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 我国历法中将一年分春、夏、秋、冬四个季节,每个季节六个节气,如春季包含立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨. 某大学美术学院的甲、乙、丙、丁四个同学接到绘制二十四节气的彩绘任务,现四位同学抽签确定各自完成其中一个季节中的 6 幅彩绘,在制签抽签公平的前提下,甲抽到绘制夏季 6 幅彩绘的概率是

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 已知 $m \neq 0$, 向量 $a = (m, n)$, $b = (-2, m)$, 若 $|a + b| = |a - b|$, 则实数 $n =$

- A. $\pm\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. -2 D. 2

7. $(ax + \frac{1}{x})^6$ 的展开式的常数项为 -160, 则实数 $a =$

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

8. 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 则

- A. $(\cos\theta)^{\sin\theta} > (\cos\theta)^{\cos\theta} > (\sin\theta)^{\cos\theta}$ B. $(\sin\theta)^{\cos\theta} > (\cos\theta)^{\sin\theta} > (\cos\theta)^{\cos\theta}$
 C. $(\cos\theta)^{\cos\theta} > (\sin\theta)^{\cos\theta} > (\cos\theta)^{\sin\theta}$ D. $(\cos\theta)^{\cos\theta} > (\cos\theta)^{\sin\theta} > (\sin\theta)^{\cos\theta}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

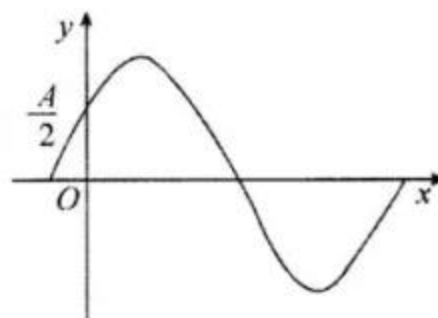
9. 下表为 2019 年某煤炭公司 1~10 月份的煤炭生产量,

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
产量(单位:万吨)	23	25	24	17.5	17.5	21	26	29	30	27

则下列结论正确的是

- A. 极差为 12.5 万吨 B. 平均值为 24 万吨
 C. 中位数为 24 万吨 D. 众数为 17.5 万吨
10. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 用一个平面 α 截这个正方体, 把该正方体分为体积相等的两部分, 则下列结论正确的是
- A. 这两部分的表面积也相等 B. 截面可以是三角形
 C. 截面可以是五边形 D. 截面可以是正六边形

11. 如图是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象, 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内有且只有一个最小值点, ω 的值可以为



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. 2
12. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦点在圆 $O: x^2 + y^2 = 13$ 上, 圆 $O: x^2 + y^2 = 13$ 与双曲线

C 的渐近线在第一、二象限分别交于点 M, N , 点 $E(0, a)$ 满足 $\vec{EO} + \vec{EM} + \vec{EN} = \vec{0}$ (其中 O 为坐标原点), 则

- A. 双曲线 C 的一条渐近线方程为 $3x - 2y = 0$ B. 双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$
 C. $|\vec{OE}| = 1$ D. $\triangle OMN$ 的面积为 6

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\alpha =$ _____.

14. 若直线 $3x + 4y + a = 0$ 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ 有且仅有一个公共点, 则实数 a 的值为 _____.

15. 在“全面脱贫”行动中, 贫困户小王 2020 年 1 月初向银行借了扶贫贴息贷款 10000 元, 用于自己开设的农产品土特产品加工厂的原材料进货, 因产品质优价廉, 上市后供不应求, 据测算每月获得的利润是该月月初投入资金的 20%, 每月月底需缴纳房租 600 元和水电费 400 元, 余款作为资金全部用于再进货, 如此继续. 预计 2020 年小王的农产品加工厂的年利润为 _____ 元. (取 $1.2^{11} = 7.5, 1.2^{12} = 9$)

16. 已知函数 $f(x) = |\log_2 x| - kx$ 在 $x \in (0, 16]$ 上有三个零点, 则实数 k 的取值范围为 _____.

四、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \cos B + b \cos A = 2c \cos B$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $A = \frac{\pi}{4}$, 角 B 的角平分线交 AC 于点 D , $BD = \sqrt{6}$, 求 CD 的长.

18. (12 分)

在① $a_1, \frac{1}{4}, a_2$ 成等差数列, ② $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等比数列, ③ $S_3 = \frac{3}{4}$, 三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并作答. 注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $3S_n = a_n + 2a_1, (n \in \mathbf{N}^*), a_1 \neq 0$, 且_____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

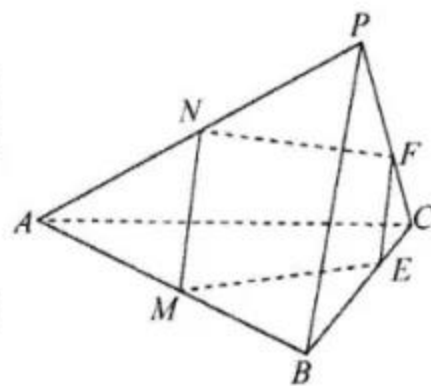
(2) 记 $b_n = -\log_2 a_n^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PBC 是边长为 2 的等边三角形, M, N 分别为 AB, AP 的中点, 过 MN 的平面与侧面 PBC 交于 EF .

(1) 求证: $MN \parallel EF$;

(2) 若平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , $AB = AC = 3$, 求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(2, \sqrt{2})$.

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若 A, B 分别为椭圆 M 的上, 下顶点, 过点 B 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 交椭圆 M 于另一点 N (异于椭圆的右顶点), 交 x 轴于点 P , 直线 AN 与直线 $x = a$ 相交于点 Q .

求证: 直线 PQ 的斜率为定值.

21. (12 分)

随着电子商务的发展,人们的购物习惯也在改变,几乎所有的需求都可以通过网络购物来解决,同时顾客的评价也成为电商的“生命线”.某电商平台在其旗下的所有电商中随机抽取了 50 家,对电商的顾客评价,包括商品符合度、物流服务、服务态度、快递包装等方面进行调查,并把调查结果转化为顾客的评价指数 x ,得到了如下的频率分布表:

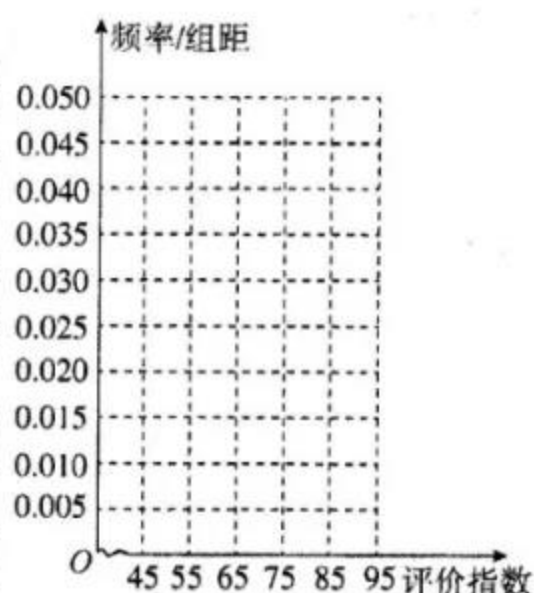
评价指数 x	$[45, 55)$	$[55, 65)$	$[65, 75)$	$[75, 85)$	$[85, 95]$
频数	a	a	b	10	b

将表中的频率作为概率,并且估计出顾客评价指数在 65 及以下的电商占全体电商的 80%.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 画出这 50 家电商顾客评价指数的频率分布直方图;

(3) 平台将对全体电商进行业务培训,预计培训后,原顾客评价指数在 $[45, 65)$ 、 $[65, 85)$ 和 $[85, 95]$ 的电商的顾客评价指数将分别提高 20、10、5. 现从这 50 家电商中随机抽取两家,经培训后,记其顾客评价指数提高值的和为 ξ ,求 ξ 的分布列和期望.



22. (12 分)

已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x$.

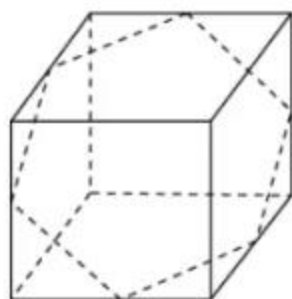
(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $F(x) = f(x) - 2x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $F(x_1) + F(x_2) > -\frac{2}{e} - 2$ (e 为自然对数的底数) 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

2021 届高三开学摸底联考 新高考卷

数学答案及评分意见

1. B 【解析】 $\frac{2i}{1-i} = \frac{2i \times (1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+i$, 故虚部为 1.
2. A 【解析】 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集个数为 $2^5 = 32$.
3. D 【解析】由图象可知: 该函数为奇函数, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 并且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 和 $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ 为偶函数, 排除 A, B; $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$ 为奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 排除 C; $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ 为奇函数, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 并且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故选 D.
4. A 【解析】因为 m, n 互为异面直线, 且 $m // \alpha, n // \alpha$, 则平面 α 内必存在两条相交直线分别与 m, n 平行, 又因为 $l \perp m$ 且 $l \perp n$, 所以 $l \perp \alpha$; 若 $l \perp \alpha$, 则 $l \perp m$ 且 $l \perp n$, 所以“ $l \perp m$ 且 $l \perp n$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的充要条件.
5. B 【解析】甲从春、夏、秋、冬四个季节中选一个季节的 6 幅彩绘绘制, 故甲抽到绘制夏季 6 幅彩绘的概率为 $\frac{1}{4}$, 故选 B.
6. D 【解析】由 $|a+b| = |a-b|$ 得 $a \perp b$, 即 $a \cdot b = -2m + mn = 0$, 因为 $m \neq 0$, 所以 $n = 2$.
7. B 【解析】 $(ax + \frac{1}{x})^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r (ax)^{6-r} (\frac{1}{x})^r = C_6^r a^{6-r} x^{6-2r}$, 令 $6-2r=0$, 得 $r=3$, 所以 $C_6^3 a^{6-3} = -160$, 解得 $a = -2$, 故选 B.
8. A 【解析】设 $a = \cos \theta, b = \sin \theta$, 因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 所以 $1 > a > b > 0$, 则 $f(x) = a^x$ 为减函数, 所以 $a^b > a^a$, 根据幂函数的性质可得 $a^a > b^a$, 故 $a^b > a^a > b^a$. 即 $(\cos \theta)^{\sin \theta} > (\cos \theta)^{\cos \theta} > (\sin \theta)^{\cos \theta}$.
9. ABD 【解析】极差为 $30 - 17.5 = 12.5$ 万吨, A 正确; 平均值为 $\frac{1}{10}(23 + 25 + 24 + 17.5 + 17.5 + 21 + 26 + 29 + 30 + 27) = 24$ 万吨, B 正确; 中位数为 $\frac{1}{10}(25 + 24) = 24.5$ 万吨, C 错误. 众数为 17.5 万吨, D 正确, 故选 ABD.
10. AD 【解析】平面 α 截这个正方体, 把该正方体分为体积相等的两部分, 则平面 α 一定过正方体的中心, 所以这两部分的表面积也相等, 根据对称性, 截面不会是三角形、五边形, 但可以是正六边形(如图). 故选 AD.



11. BC 【解析】由图可知: $f(0) = \frac{A}{2}$, 即 $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$

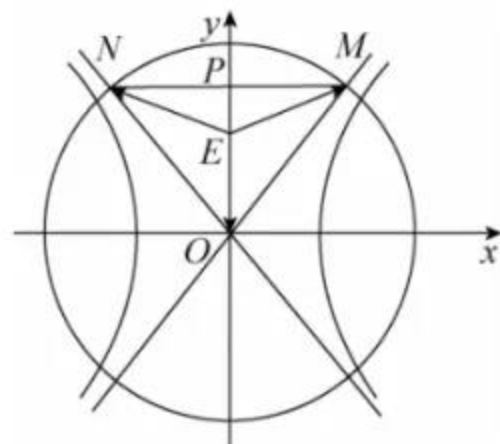
有且只有一个最小值点, 可得 $\begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} \times \frac{3}{4} - \frac{\pi}{6\omega} \leq 2\pi, \\ \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \times \frac{3}{4} - \frac{\pi}{6\omega} > 2\pi, \end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3} \leq \omega < \frac{5}{3}$. 故选 BC.

12. ABD 【解析】如图: 设双曲线 C 的焦距为 $2c = 2\sqrt{13}$, MN 与 y 轴交于点 P , 由题可知 $|OM| = c = \sqrt{13}$, 则 $P(0, b)$, 由 $\vec{EO} + \vec{EM} + \vec{EN} = \vec{0}$ 得点 E 为三角形 OMN 的重心, 可得 $|OE| = \frac{2}{3}|OP|$,

即 $a = \frac{2}{3}b$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{9}{4}$, $a = 2, b = 3, e^2 - 1 = \frac{9}{4}$, 解得 $e =$

$\frac{\sqrt{13}}{2}$. 双曲线 C 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$, $|\vec{OE}| = 2$, M 的坐标

为 $(2, 3)$, $S_{\triangle OMN} = 6$, 故选 ABD.



13. $-\frac{7}{25}$ 【解析】 $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos 2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) - 1 = -\frac{7}{25}$.

14. 4 或 -16 【解析】由题, 圆心 $(2, 0)$ 到直线 $3x + 4y + a = 0$ 的距离 $d = \frac{|6 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$, 解得 $a =$

4 或 $a = -16$.

15. 40000 【解析】设一月月底小王手中有现款为 $a_1 = (1 + 20\%) \times 10000 - 1000 = 11000$ 元, n 月月底小王手中有现款为 a_n , $n + 1$ 月月底小王手中有现款为 a_{n+1} , 则 $a_{n+1} = 1.2a_n - 1000$,

即 $a_{n+1} - 5000 = 1.2(a_n - 5000)$, 所以数列 $\{a_n - 5000\}$ 是以 6000 为首项, 1.2 为公比的等比数列,

$a_{12} - 5000 = 6000 \times 1.2^{11}$, 即 $a_{12} = 6000 \times 1.2^{11} + 5000 = 50000$ 元. 年利润为 $50000 - 10000 = 40000$ 元.

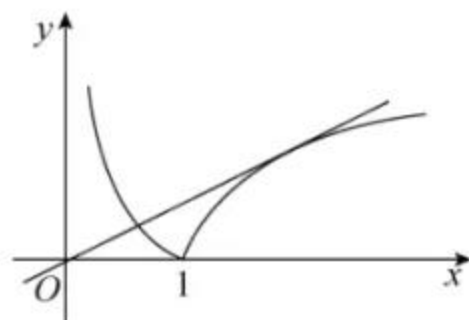
16. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{e\ln 2})$ 【解析】函数 $f(x) = |\log_2 x| - kx$ 在 $x \in (0, 16]$ 上的零点个数即为函数 $g(x) =$

$|\log_2 x|$ 与 $y = kx$ 的图象的交点个数, 函数 $g(x)$ 的图象如图, 则必有 $k > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, 必有一个交点; 当 $1 < x \leq 16$ 时, 设过原点的直线与 $y = \log_2 x$ 的切点为 $(x_0, \log_2 x_0)$, 则 $k = \frac{1}{x_0 \ln 2}$, 则切线方程

为 $y - \log_2 x_0 = \frac{1}{x_0 \ln 2}(x - x_0)$, 将 $(0, 0)$ 代入得 $-\log_2 x_0 = -\frac{1}{\ln 2}$, 即

$x_0 = e$, 所以 $k = \frac{1}{e\ln 2}$, 又由 $\log_2^{16} - 16k = 0$ 得 $k = \frac{1}{4}$, 结合图象可知, 实数 k 的取值范围为 $[\frac{1}{4},$

$\frac{1}{e\ln 2})$.



17. 【解析】(1) 因为 $a\cos B + b\cos A = 2c\cos B$, 由正弦定理可得

$$\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2 \sin C \cos B, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \sin(A+B) = 2 \sin C \cos B, \text{ 即 } \sin C = 2 \sin C \cos B,$$

$$\text{因为 } 0 < C < \pi, \text{ 所以 } \sin C > 0, \text{ 故 } \cos B = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } \angle ABD = \angle CBD = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{又 } A = \frac{\pi}{4}; \text{ 所以 } \angle ADB = \frac{7\pi}{12}, \angle CDB = \frac{5\pi}{12}, \text{ 可得 } \angle BCD = \frac{5\pi}{12},$$

$$\text{所以 } BC = BD = \sqrt{6}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中, 由余弦定理可得 } CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos \angle CBD,$$

$$\text{即 } CD^2 = 6 + 6 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 - 6\sqrt{3} = (3 - \sqrt{3})^2, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } CD = 3 - \sqrt{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】(1) 由已知 $3S_n = a_n + 2a_1, n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} = a_{n-1} + 2a_1$. 两式相减得到 $3a_n = a_n - a_{n-1}$,
 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2}. \text{ 因为 } a_1 \neq 0, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 是公比为 } -\frac{1}{2} \text{ 的等比数列, 从而 } a_n = a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

选① $a_1, \frac{1}{4}, a_2$ 成等差数列,

$$\text{由 } a_1, \frac{1}{4}, a_2 \text{ 成等差数列, 可得 } a_1 + a_2 = 2 \times \frac{1}{4}, \text{ 即 } a_1 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } a_1 = 1, \text{ 所以 } a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

选② $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等比数列,

$$a_1, a_2 + 1, a_3 \text{ 成等比数列, 即 } a_1, -\frac{1}{2}a_1 + 1, \frac{1}{4}a_1 \text{ 成等比数列, } \left(-\frac{1}{2}a_1 + 1\right)^2 = \frac{1}{4}a_1^2, \text{ 解得 } a_1 = 1, \text{ 所以 } a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

选③ $S_3 = \frac{3}{4}$,

$$S_3 = \frac{3}{4}, \text{ 即 } a_1 + \left(-\frac{1}{2}a_1\right) + \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}, \text{ 解得 } a_1 = 1, \text{ 所以 } a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) b_n = -\log_2 a_n^2 = -\log_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = -\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \log_2 2^{2n-2} = 2n - 2. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

则 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (0 + 2 + 4 + \cdots + (2n - 2)) = n(n - 1)$ 12 分

19. 【解析】(1) 因为 M, N 分别为 AB, AP 的中点, 所以 $MN \parallel PB$,

又 $MN \not\subset$ 平面 $PBC, PB \subset$ 平面 PBC , 所以 $MN \parallel$ 平面 PBC , 2 分

因为平面 $MNEF \cap$ 平面 $PBC = EF$,

所以 $MN \parallel EF$ 4 分

(2) 因为平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , 取 BC 中点 O ,

连接 PO, AO , 因为 $\triangle PBC$ 是等边三角形, 所以 $PO \perp BC$,

所以 $PO \perp$ 平面 ABC , 故 $PO \perp AO$, 又因为 $AB = AC$,

所以 $AO \perp BC$, 以 O 为坐标原点, 分别以 OB, AO, OP 为 x, y, z

轴建立如图所示的空间直角坐标系, 7 分

可得 $O(0, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), A(0, -2\sqrt{2}, 0), B(1, 0, 0),$

$C(-1, 0, 0)$,

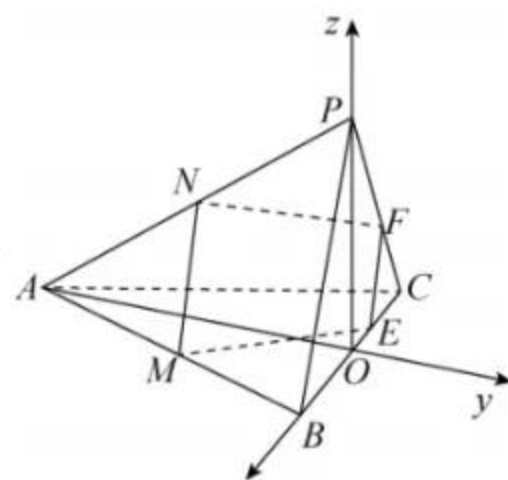
所以 $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PA} = (0, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PC} = (-1, 0, -\sqrt{3})$,

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -2\sqrt{2}y - \sqrt{3}z = 0, \\ -x - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 9 分

令 $y = \sqrt{2}$, 得 $x = 4, z = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\mathbf{n} = (4, \sqrt{2}, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$,

$\cos \langle \overrightarrow{PB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{4 + 4}{2 \times \frac{\sqrt{210}}{3}} = \frac{2\sqrt{210}}{35}$, 11 分

所以直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{210}}{35}$ 12 分



20. 【解析】(1) 设椭圆的焦距为 $2c$, 则 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ①,

$\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ ②, 又 $a^2 = b^2 + c^2$ ③, 2 分

由①②③解得 $a^2 = 8, b^2 = 4, c^2 = 4$,

所以椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 证明: 易得 $A(0, 2), B(0, -2)$, 直线 l 的方程为 $y = kx - 2$, 因为直线 l 不过点 $(2\sqrt{2}, 0)$,

所以 $k \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $\begin{cases} y = kx - 2, \\ x^2 + 2y^2 = 8, \end{cases}$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 - 8kx = 0$, 6 分

所以 $x_N = \frac{8k}{2k^2+1}$, 从而 $N(\frac{8k}{2k^2+1}, \frac{4k^2-2}{2k^2+1})$, $P(\frac{2}{k}, 0)$,

直线 AN 的斜率为 $\frac{\frac{4k^2-2}{2k^2+1}-2}{\frac{8k}{2k^2+1}} = -\frac{1}{2k}$, 故直线 AN 的方程为 $y = -\frac{1}{2k}x + 2$ 8 分

令 $x = 2\sqrt{2}$, 得 $Q(2\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{k} + 2)$, 10 分

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{k} + 2}{2\sqrt{2} - \frac{2}{k}} = \frac{-\sqrt{2} + 2k}{2\sqrt{2}k - 2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}k - 1)}{2(\sqrt{2}k - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以直线 PQ 的斜率为定值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 分

21. 【解析】(1) 由题可得 $\begin{cases} 2a + 2b + 10 = 50, \\ 2b + 10 = 40, \end{cases}$

解得 $a = 5, b = 15$ 2 分

(2) 频率分布直方图如右图: 6 分

(3) 由题 ξ 可能的值为 10, 15, 20, 25, 30, 40,

$$P(\xi = 10) = \frac{C_{15}^2}{C_{50}^2} = \frac{3}{35}; P(\xi = 15) = \frac{C_{25}^1 C_{15}^1}{C_{50}^2} = \frac{15}{49},$$

$$P(\xi = 20) = \frac{C_{25}^2}{C_{50}^2} = \frac{12}{49}; P(\xi = 25) = \frac{C_{10}^1 C_{15}^1}{C_{50}^2} = \frac{6}{49},$$

$$P(\xi = 30) = \frac{C_{10}^1 C_{25}^1}{C_{50}^2} = \frac{10}{49}; P(\xi = 40) = \frac{C_{10}^2}{C_{50}^2} = \frac{9}{245}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以分布列为:

ξ	10	15	20	25	30	40
P	$\frac{3}{35}$	$\frac{15}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{9}{245}$

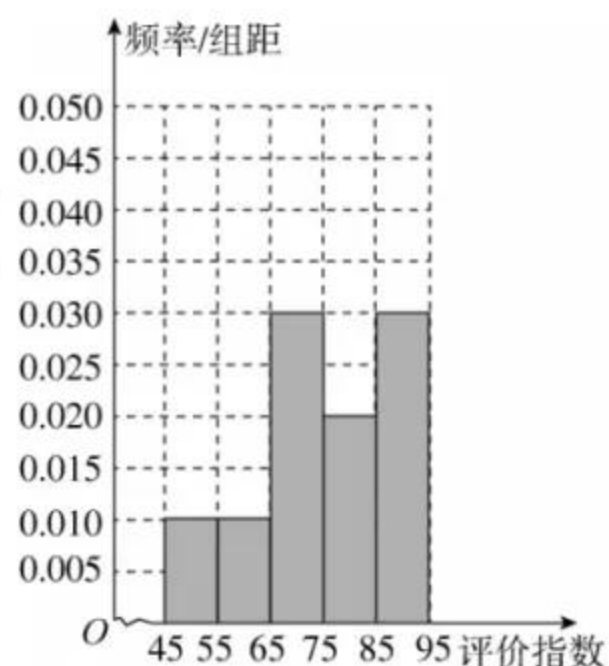
所以 $E(\xi) = 10 \times \frac{3}{35} + 15 \times \frac{15}{49} + 20 \times \frac{12}{49} + 25 \times \frac{6}{49} + 30 \times \frac{10}{49} + 40 \times \frac{9}{245} = 21$ 12 分

22. 【解析】(1) 由题, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = x + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + a}{x}$,

① 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值, 2 分

② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\sqrt{-a}$ (舍) 或 $x = \sqrt{-a}$,

当 $0 < x < \sqrt{-a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > \sqrt{-a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,



所以当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(\sqrt{-a}) = \frac{a}{2}[\ln(-a) - 1]$, 无极大值. 4 分

(2) 函数 $F(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $F(x) = f(x) - 2x = \frac{1}{2}x^2 + a\ln x - 2x$, 5 分

$$F'(x) = x + \frac{a}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + a}{x}, \text{ 令 } F'(x) = 0, \text{ 即 } x^2 - 2x + a = 0 (x > 0),$$

当 $\Delta = 4 - 4a \leq 0$ 时, 即 $a \geq 1$ 时, $F(x)$ 无极值; 6 分

当 $\Delta = 4 - 4a > 0$ 时, 得 $a < 1$,

当 $a < 1$ 时, 设 $x^2 - 2x + a = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 2$ 且 $x_1 x_2 = a$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $x^2 - 2x + a = 0$ 不存在两个正根, $F(x)$ 不存在两个极值点.

② 当 $0 < a < 1$ 时,

解得 $x = 1 \pm \sqrt{1 - a}$;

当 $0 < x < 1 - \sqrt{1 - a}$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

当 $1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减,

当 $x > 1 + \sqrt{1 - a}$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

所以, 当 $0 < a < 1$ 时, $F(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 8 分

$$\text{且 } x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = a, F(x_1) + F(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + a\ln x_1 - 2x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + a\ln x_2 - 2x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$$

$$- x_1 x_2 + a\ln(x_1 x_2) - 2(x_1 + x_2) = a\ln a - a - 2, \text{ 10 分}$$

令 $h(a) = a\ln a - a - 2$, $h'(a) = \ln a$, 当 $0 < a < 1$ 时, $h'(a) = \ln a < 0$, $h(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$$\text{又 } h\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e} - 2,$$

所以实数 a 的取值范围为 $0 < a < \frac{1}{e}$ 12 分